

DOI:10.14048/j.issn.1671-2579.2023.02.011

基于 Gamma 与 Markov 的沥青路面性能预测模型对比分析

马士宾,陈永昊*

(河北工业大学 土木与交通学院,天津市 300401)

摘要:路面使用性能预测作为路面管理系统中的重要组成部分,是进行沥青路面养护管理决策的重要依据和前提条件。该文引入 Gamma 和 Markov 两种随机过程的相关理论,分别构建沥青路面使用性能预测模型,对与路面退化性质相关的不确定性进行阐述。结果表明:随机过程模型在预测路面性能退化和路面寿命方面具有一定的作用。然后通过 Matlab 软件编程对沥青路面使用性能和寿命进行预测,获得了沥青路面状态退化曲线,大大提高了预测的精度和有效性。最终以河北省某试验路段为例,通过对 Gamma 与 Markov 过程预测模型的对比分析,证明了基于 Gamma 过程的沥青路面性能预测模型的实用性和优越性,为未来的沥青路面使用性能预测提供了新的思路。

关键词:沥青路面;使用性能;Markov 过程;Gamma 过程;预测模型

中图分类号:U416.2

文献标志码:A

0 引言

沥青路面使用性能预测是进行沥青路面养护管理决策的基础,同时也是交通基础设施规划建设及资源分配的依据,准确合理地预测沥青路面使用性能对公路的科学养护和高效运营具有指导意义。

目前,基于状态退化的路面性能预测模型可以分为确定性模型、统计模型和随机模型3种类型。确定性模型将退化路径描述为线性或非线性回归方程^[1-3];统计模型将退化速率视为随机变量,并通过将数据拟合到概率分布函数来估计可靠性^[4]。然而由于材料、环境、交通荷载和养护措施等因素的变化特性,路用性能的退化存在很大的不确定性,导致路面退化参数难以量化,统计费时费力,后期更新存在困难。随机模型认为数据是各影响因素综合作用于路用性能的宏观体现,通过对数据信息充分的开发挖掘,提取有用信息,能够实现对路面性能退化规律的有效描述,这也适用于现今中国沥青路面“样本小,信息少,不确定”的特点。Markov 过程是目前公认的随机模型,已经充分应用于沥青路面使用性能预

测^[5]。但作为一个离散随机过程,Markov 过程不能描述路面退化的连续特性,而对于路面退化这种连续随机过程,Gamma 过程明显优于 Markov 过程^[6],因此 Gamma 过程更适合对沥青路面退化过程进行建模。近年来,Gamma 过程已经在多个领域得到了广泛应用^[7]。因此,本文以沥青路面退化过程的随机性为切入点,引入 Gamma 过程的相关理论,建立基于 Gamma 过程的沥青路面性能预测模型;开展路面性能退化模型建模方法研究,以获得沥青路面性能退化规律,为沥青路面使用性能评估与预测提供理论支撑。

1 沥青路面使用性能指标

沥青路面使用性能指标分为单项指标和综合指标两类。其中单项指标分别为路面损坏状况指数 I_{PCI} 、路面行驶质量评价指标 I_{RQI} 、路面车辙指数 I_{RDI} 、路面抗滑性能指数 I_{SRI} 、路面跳车指数 I_{PBI} 、路面磨耗指数 I_{PWI} 、路面结构强度指数 I_{PSSI} ;综合指标即路面使用性能指数 I_{PQI} 为全部单项指标的加权算术平均值,是对沥青路面使用性能量化的综合描述。其计算公

收稿日期:2021-12-25

作者简介:马士宾,男,博士,教授.E-mail:marotolo@126.com

*通信作者:陈永昊,男,硕士研究生.E-mail:462737624@qq.com

式如式(1)所示:

$$I_{PQI} = \omega_{PCI} I_{PCI} + \omega_{RQI} I_{RQI} + \omega_{RDI} I_{RDI} + \omega_{SRI} I_{SRI} + \omega_{PBI} I_{PBI} + \omega_{PWI} I_{PWI} + \omega_{PSSI} I_{PSSI} \quad (1)$$

式中: ω_{PCI} 、 ω_{RQI} 、 ω_{RDI} 、 ω_{SRI} 、 ω_{PBI} 、 ω_{PWI} 、 ω_{PSSI} 分别为 I_{PCI} 、 I_{RQI} 、 I_{RDI} 、 I_{SRI} 、 I_{PBI} 、 I_{PWI} 、 I_{PSSI} 在 I_{PQI} 中的权重^[8]。

本研究选取路面使用性能指数 I_{PQI} 作为沥青路面使用性能指标,并参考中国现行《公路技术状况评定标准》(JTG 5210—2018)^[8]的沥青路面使用性能等级划分标准,对沥青路面所处状态进行赋值以实现量化,分别用第1状态(需要进行大修、重修)到第6状态(刚铺设或刚完成大修)表示。具体划分方法见表1。

表1 沥青路面状态划分标准

沥青路面状态	I_{PQI}	沥青路面状态	I_{PQI}
6	100	3	[70, 80)
5	[90, 100)	2	[60, 70)
4	[80, 90)	1	[0, 60)

2 基于Gamma过程的沥青路面性能预测模型

2.1 模型建立

路面状态的退化往往表现出随时间单调递增的趋势,具有随机性和不可逆性两大特征。Gamma过程是一个独立非负的增量过程,具有描述这两大特征的基本属性^[9]。

基于这个特点,设路面状态退化过程为随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$,满足Gamma过程。那么可以定义随机变量 $X_{i+1} - X_i$ 为两次检查时间 $t_{i+1} > t_i \geq 0$ 的退化增量,该变量与 t_i 之前的退化量相对独立并服从Gamma分布,即 $X_{i+1} - X_i \sim \text{Ga}[\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i), \beta]$,其中形状参数 $\lambda(t) > 0$,尺寸参数 $\beta > 0$ 。

Gamma过程的概率密度函数关系式为:

$$\text{Ga}[x|\lambda(t), \beta] = \frac{\beta^{\lambda(t)}}{\Gamma[\lambda(t)]} x^{\lambda(t)-1} e^{-\beta x} \quad (2)$$

$$\Gamma[\lambda(t)] = \int_0^{+\infty} a^{\lambda(t)-1} e^{-a} da \quad (3)$$

式中: $\Gamma(\cdot)$ 为Gamma函数; $\text{Ga}[x|\lambda(t), \beta]$ 为Gamma过程的概率密度函数; $\lambda(t)$ 为Gamma过程的形状参数; β 为Gamma过程的尺寸参数; x 为路面状态退化量; t 为时间(年)。

路面状况退化量 $X(t)$ 的期望 $E[X(t)]$ 和方差

$D[X(t)]$ 为:

$$\begin{cases} E[X(t)] = \frac{\lambda(t)}{\beta} \\ D[X(t)] = \frac{\lambda(t)}{\beta^2} \end{cases} \quad (4)$$

通常,形状参数表示为幂函数 $\lambda(t) = ct^b$, $c > 0$, $b > 0$,并且与时间呈正相关。根据实际经验,沥青路面的退化量 $X(t)$ 通常随时间呈现平稳递增的趋势,不会出现较大的波动或跳跃。本文认定沥青路面的退化是平稳的Gamma过程,则形状参数 $\lambda(t)$ 的指数 $b = 1$,即 $\lambda(t) = ct$ 。

对于Gamma过程的参数取值问题,采用矩估计法对形状参数 $\lambda(t)$ 的系数 c 和尺寸参数 β 进行估算^[9]。具体计算方法如下:

$$\frac{c}{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} = \frac{x_n}{t_n} = \bar{\delta} \quad (5)$$

$$\frac{x_n}{\beta} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right)^2} \right] = \sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta} \omega_i)^2 \quad (6)$$

式中: n 为沥青路面检测总次数; δ_i 为第 i 次路面检测相对于上次检测的沥青路面状态退化增量,即 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$; ω_i 为第 i 次路面检测距离上次检测的时间间隔,即 $\omega_i = t_i - t_{i-1}$,由于目前中国公路路面检测周期一般为一年一次,所以取 $\omega_i = 1$; x_n 为第 n 次路面检测时沥青路面的状态退化量; t_n 为第 n 次路面检测的时间(年); $\bar{\delta}$ 为进行 n 次路面检测的状态退化量的平均值。

2.2 模型预测

Gamma过程认为沥青路面退化表现为退化增量随时间的连续积累,而不是在离散时间间隔内的累积退化。因此,以路面状况退化量 $X(t)$ 的期望为基础,确定Gamma退化方程,即 $X(t) = ct/\beta$ 。通过退化方程对沥青路面状态退化量进行估算,完成对沥青路面使用性能的预测。当沥青路面状态低于1时,认定路面处于失效状态,进而确定出沥青路面的使用寿命。

针对沥青路面使用寿命预测存在的问题,提出如下更精确的计算方法。当路面状态退化量 $X(t)$ 超过路面退化的设计容量 ρ ,即 $X(t) = \rho$ 时,沥青路面表现为失效状态,此时的时间设为 t_0 。因此,可以定

义沥青路面失效概率为在特定时间 t 内沥青路面状态退化量 $X(t)$ 超过路面退化设计容量 ρ 的概率, 失效概率函数可写为:

$$F_T(t) = P[X(t) > \rho] = 1 - P[X(t) \leq \rho] = 1 - \text{Ga}[\rho | \lambda(t), \beta] \quad (7)$$

式中: $F_T(t)$ 为路面衰变的失效概率函数; ρ 为路面退化的设计容量, 即沥青路面失效的阈值; $\text{Ga}[\rho | \lambda(t), \beta]$ 为 Gamma 过程在 t 时 $X(t)$ 取值小于或等于 ρ 的概率。

同时定义沥青路面可靠性为在特定时间 t 内沥青路面实现预期效果, 完成预期功能的概率, 可靠性函数可写为:

$$R(t) = 1 - F(t) = P[X(t) \leq \rho] = \text{Ga}[\rho | \lambda(t), \beta] \quad (8)$$

基于以上理论, 可以认定当 $F_T(t) = R(t) = 50\%$ 时, 沥青路面的失效时间 t_i 为沥青路面的使用寿命。

3 基于 Markov 过程的沥青路面性能预测模型

3.1 模型建立

Markov 过程预测模型是一种随机的动态模型, 模型建立的基础是系统的“原始状态”和“状态转移”概念, 其核心在于系统状态转移的马尔可夫链。马尔可夫链实质上是具有无记忆特性的随机过程模型, 即对于随机过程 $\{X(t), t > 0\}$, 当在时间 t_0 时所处的状态已知, 则转移到下一状态仅取决于 t_0 时状态下的转移概率, 而与 t_0 以前的状态无关。换句话说, 路面将保持其当前状态或过渡到下一个较低的状态 (本文假定路面状况一次不会下降超过一种状态)。

Markov 过程预测模型的基本原理是通过原始数据序列求得状态转移矩阵, 根据系统现在所处的状态, 采用 Markov 过程得到系统未来可能达到某种状态的概率。根据表 1, 马尔可夫预测的初始状态可表示为:

$$P_0(0) = [p_6(0), p_5(0), p_4(0), p_3(0), p_2(0), p_1(0)], \sum p_i = 1 \quad (9)$$

式中: $p_i(0)$ ($i = 6, 5, 4, 3, 2, 1$) 分别为初始状态下沥青路面各评价指标所占比例, 具体值可由统计方法得到, 即各类等级路段长度占总体长度的比例。

已知沥青路面从状态 i 转移到状态 j 的概率, 那么具有 6 种独立状态的沥青路面的转移概率就构成了转移概率矩阵 P , 其形式如下:

$$P = [P_{ij}]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{61} & \cdots & p_{66} \end{bmatrix} \quad (10)$$

对于转移概率矩阵 P , 具有以下性质: ① $P_{ij} > 0$; ② $\sum_{i=1}^n P_{ij} = 1, (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 。

对于一个初始状态为 P_0 的系统, 当其经过 t 步的转移后 (即由初始时间变为 t 时间), 其状态概率可表示为:

$$P_t = P_{t-1} \times P = P_{t-2} \times P^2 = \dots = P_0 \times P^t \quad (11)$$

3.2 模型预测

在求解转移概率矩阵 P 时, 引入矩阵指数的相关理论^[10]。当沥青路面的退化符合连续时间 Markov 过程时, 转移概率矩阵 P 与强度矩阵 Q 有关, 表示为:

$$P = e^Q \quad (12)$$

式中: 强度矩阵 Q 为沥青路面从状态 i 转移到状态 j 的转移率矩阵, 可表示为:

$$Q = \begin{bmatrix} -\theta_6 & \theta_6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -\theta_5 & \theta_5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -\theta_4 & \theta_4 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -\theta_3 & \theta_3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -\theta_2 & \theta_2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -\theta_1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

强度矩阵 Q 的第 1 行和第 1 列表示状态 6, 第 6 行和第 6 列表示状态 1, 其中 θ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) 表示沥青路面的状态转移率, 由于状态 1 不存在状态转移, 所以 $\theta_1 = 0$ 。

由式 (12)、(13) 能够建立沥青路面退化的状态转移矩阵 P , 则 t 年后路面状态退化可以描述为 $\{P_0\}[P]^t$ 。当 t_i 年后沥青路面的平均状态低于状态 1 时, 沥青路面表现为失效状态, 此时的 t_i 为沥青路面的失效时间即沥青路面的使用寿命。沥青路面的平均状态可通过下式进行计算:

$$E(t) = \sum_{i=1}^6 i \times (\{P_0\}[P]^t) \quad (14)$$

4 算例

为了验证本研究采用的随机过程预测模型的

行性和合理性,选取河北省某试验路段作为研究对象进行分析验证。研究收集了试验路段各评价单元的路面检测数据作为样本,并按照表1沥青路面状态的划分标准,对路面检测数据进行处理,具体的样本信息如表2所示。

表2 试验路段沥青路面状态

路段	试验段沥青路面状态								
	第0年	第1年	第2年	第3年	第4年	第5年	第6年	第7年	第8年
1#	6	6	5	5	4	4	3	2	2
2#	6	6	5	5	5	4	4	3	3
3#	6	6	5	5	4	4	3	3	2
4#	6	5	5	4	3	2	2	2	1
5#	6	6	5	5	4	4	3	3	2
6#	6	6	5	5	4	4	3	2	1
7#	6	5	4	4	4	3	3	2	2
8#	6	5	5	5	4	4	4	3	2
9#	6	5	5	4	4	4	3	3	2
10#	6	6	5	5	4	4	3	3	2
11#	6	5	4	4	4	3	3	2	2
12#	6	5	4	4	3	3	2	2	1
13#	6	5	5	4	4	3	3	2	2
14#	6	5	5	5	4	4	4	3	3
15#	6	5	5	4	3	3	3	2	2
16#	6	5	5	4	4	3	2	2	1
17#	6	6	5	5	4	4	4	3	3
18#	6	6	5	5	5	4	4	3	2
19#	6	5	5	4	4	4	3	2	2
20#	6	5	5	4	4	3	3	2	1

4.1 基于Gamma过程的沥青路面使用性能预测

4.1.1 Gamma过程参数计算

根据表2中的数据,计算出试验段在各个路检年份的平均路面状态,将其作为Gamma过程的样本,并结合矩估计法对Gamma过程形状参数 $\lambda(t)$ 的系数 c 和尺寸参数 β 进行估算,计算结果如表3所示。

表3 矩估计法计算结果

$t_n/\text{年}$	$\omega_i/\text{年}$	x_n	$\bar{\delta}_i$	\bar{c}	β
8	1	4.1	0.512 5	27.072 7	52.824 9

4.1.2 模型预测

根据表3的计算结果,可将该路段沥青路面退化模型描述为服从形状参数 $\lambda(t)=27.070 7t$ 和尺寸参数 $\beta=52.824 9$ 的Gamma过程。通过式(4)能够计算出Gamma过程的期望 $E[X(t)]=0.512 5t$ 和方差

$D[X(t)]=0.009 7t$ 。根据上述模型可知,沥青路面在任意时刻的状态退化量均可描述为服从Gamma分布的随机变量。例如,在 $t=3$ 年时,其状态退化量 $X(3)$ 服从参数为 $\lambda(3)=81.218 2, \beta=52.824 9$ 的Gamma分布。

根据该模型,应用概率论中的 3σ 原则,适当缩小随机变量的取值范围,可得沥青路面状态退化量随时间演变的规律,如图1所示。

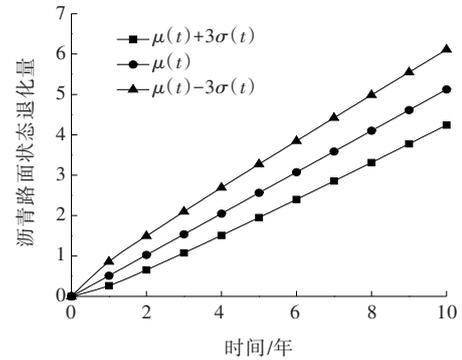


图1 沥青路面退化趋势

由图1可以看出:随着时间的递增,状态退化量具有单调递增的趋势,而且在任意时刻,退化量不是一个确定值,而具有明显的随机性,符合路面退化具有随机性和不可逆性的一般规律。

在已知Gamma过程参数的情况下,结合式(2)能够得出Gamma过程的概率密度函数为 $f_{X(t)}=\text{Ga}(x|27.070 7t, 52.824 9)$ 。根据函数关系式能够看出不同的 t 对应着不同的概率密度曲线,分别取 t 为2年、4年、6年、8年,使用Matlab软件绘制相对应的概率密度曲线,如图2所示。由图2可知:随时间增加,曲线宽度增加,并且由于未来不确定性因素的增多,概率密度降低。

由于已知沥青路面退化的设计容量 $\rho=5$,即图2中的临界退化量,因此以Gamma过程的概率密度函数为基础,并结合式(7)、(8),使用Matlab软件绘制出沥青路面随时间 t 发生退化的失效概率和可靠性曲线,如图3所示。同时通过Matlab软件进行编程计算,能够确定失效概率和可靠性曲线交点处所对应的时间,即沥青路面的失效时间 $t_f=9.77$ 年,则试验路段沥青路面的预测寿命为9.77年。在失效时间 t_f 的Gamma过程的概率密度曲线如图4所示。

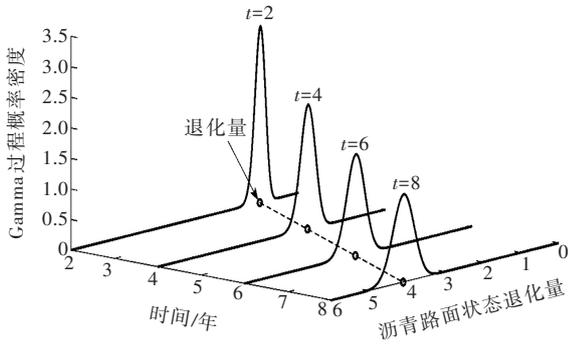


图2 Gamma过程概率密度曲线

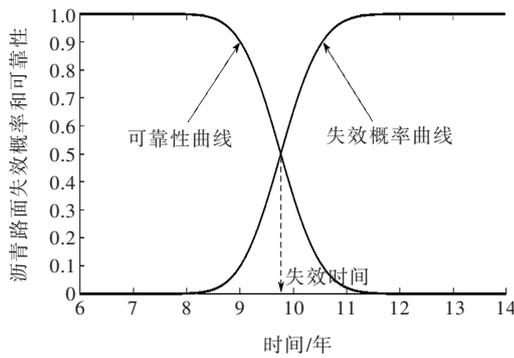


图3 沥青路面失效概率和可靠性曲线

同时由于Gamma过程的偏度 $S = 2/\sqrt{\lambda(t)}$, 随

$$Q = \begin{bmatrix} -0.7143 & 0.7143 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.4878 & 0.4878 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.4444 & 0.4444 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5429 & 0.5429 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2692 & 0.2692 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4898 & 0.3924 & 0.1008 & 0.0149 & 0.0021 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.6140 & 0.3061 & 0.0663 & 0.0127 & 0.0009 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6412 & 0.2714 & 0.0795 & 0.0079 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.5811 & 0.3628 & 0.0561 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7640 & 0.2360 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (16)$$

4.2.2 模型预测

根据表2中试验段沥青路面的实际情况,设沥青路面的初始状态为 $P_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$,通过式(11)计算每一年的沥青路面状态概率 P_t ,并通过式(14)计算出沥青路面每一年的状态均值 $E(t)$ 。同时利用计算得到的状态均值 $E(t)$ 数据绘制出沥青路面状态的退化曲线,如图5所示。

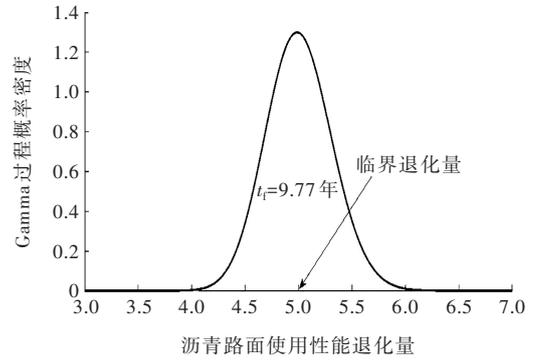


图4 失效时间 t_f 的Gamma过程概率密度曲线

随着时间 t 的增加, S 趋近于0。在失效时间 t_f 时,偏度 $S = 0.1230$,此时Gamma过程的概率密度曲线与正态分布曲线十分相近,可以令期望 $E[X(t)] = \rho$ 对沥青路面的使用寿命进行估算,结果 $t'_f = 9.76$ 年,与实际预测结果十分接近,在缺乏计算工具的情况下,能够起到一定的参考作用。

4.2 基于Markov过程的沥青路面使用性能预测

4.2.1 转移概率矩阵的确定

根据表2,统计计算得出强度矩阵 Q 。

以获得的强度矩阵 Q 为基础,结合式(12)使用Matlab软件编程建立转移概率矩阵 P 。

由图5可知:由于马尔可夫链预测的局限性,沥青路面状态退化曲线降落速度逐渐变慢,最终收敛于状态1,这会大大增加沥青路面失效时间 t_f 的计算结果,造成对路面寿命的过高估计。所以本文认定当沥青路面状态低于1.5时^[11],路面处于失效状态,此时对应的失效时间 $t_f = 12.53$ 年,即试验段沥青路面的预测寿命为12.53年。

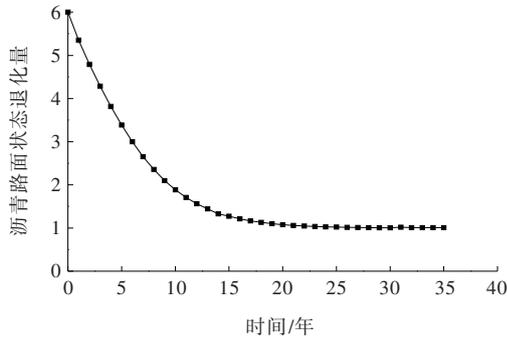


图5 沥青路面状态退化曲线

4.3 预测结果对比分析

通过 Matlab 软件计算 Gamma 过程和 Markov 过程两种模型的路面状态预测值,并与路面状态实测值进行对比分析,具体计算结果如表 4 所示,从整体上看, Gamma 过程预测模型提供的路面状态预测值更精确有效。

表 4 不同预测模型对应的路面状态

时间/ 年	路面状态 实测值	Gamma 过程预测模型		Markov 过程预测模型	
		路面状态 预测值	相对误 差/%	路面状态 预测值	相对误 差/%
1	5.40	5.49	1.63	5.35	0.93
2	4.85	4.98	2.58	4.79	1.24
3	4.50	4.46	0.83	4.28	4.89
4	3.95	3.95	0.00	3.82	3.40
5	3.55	3.44	3.10	3.39	4.62
6	3.10	2.93	5.48	3.00	3.30
7	2.50	2.41	3.60	2.65	6.14
8	1.90	1.90	0.00	2.35	23.68

表 5 对比了两种随机模型预测的沥青路面寿命,表 5 表明 Gamma 过程预测模型提供的沥青路面预测寿命更加“保守”,更符合真实情况。

表 5 不同预测模型对应的路面预测寿命

模型类别	沥青路面预测寿命 t_f /年
Gamma 过程预测模型	9.77
Markov 过程预测模型	12.53

综上所述, Gamma 过程预测模型整体上优于 Markov 过程预测模型。

5 结论

(1) 引入 Gamma 过程,建立基于 Gamma 过程的沥青路面退化动态模型,研究沥青路面的退化规律,

为未来的沥青路面使用性能预测提供了一种新的量化方法。

(2) 引入矩阵指数的概念,更新 Markov 过程概率转移函数的计算方法,提高了预测结果的真实性和有效性。

(3) 建模过程中根据经验设定 Gamma 过程的形状参数为线性函数,存在一定的局限性。因此,非线性函数下沥青路面退化 Gamma 模型的特征参数估计是未来的主要研究方向。

参考文献:

- [1] 周育名,李金明,李平,等.考虑公路等级的沥青路面性能衰变预测方法[J].中外公路,2019,39(1):34-39.
- [2] LI N Y, XIE W C, HAAS R. Reliability-based processing of markov chains for modeling pavement network deterioration [J]. Transportation Research Record, 1996, 1524(1): 203-213.
- [3] 刘燕燕,周奇,龙森,等.路面养护措施负指数与 S 形衰变模型拟合研究[J].中外公路,2019,39(1):50-54.
- [4] DO M. Comparative analysis on mean life reliability with functionally classified pavement sections[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2011, 15(2): 261-270.
- [5] KOBAYASHI K, DO M, HAN D. Estimation of Markovian transition probabilities for pavement deterioration forecasting[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2010, 14(3): 343-351.
- [6] STRAUSS A, WAN-WENDNER R, VIDOVIC A, et al. Gamma prediction models for long-term creep deformations of prestressed concrete bridges[J]. Journal of Civil Engineering and Management, 2017, 23(6): 681-698.
- [7] 安宗文,刘小刚,高建雄.基于裂纹扩展理论的结构强度退化模型[J].兰州理工大学学报,2014,40(6):45-48, 17.
- [8] 交通运输部公路科学研究院.公路技术状况评定标准: JTG 5210—2018[S].北京:人民交通出版社股份有限公司,2018.
- [9] VAN NOORTWIJK J M, PANDEY M D. A stochastic deterioration process for time-dependent reliability analysis [C]//11th IFIP WG7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems, 2003: 259-265.
- [10] JACKSON C H. Multi-state models for panel data: The msm package for R[J]. Journal of Statistical Software, 2011, 38(8): 1-28.
- [11] PARK S H, KIM J H. Comparative analysis of performance prediction models for flexible pavements[J]. Journal of Transportation Engineering, Part B: Pavement, 2019, 145(1): 04018062.