

## 悬索桥桥塔纵桥向计算长度系数研究

陈国红<sup>1,2</sup>, 宋晓莉<sup>1</sup>

(1. 山东省交通规划设计院集团有限公司, 山东 济南 250031; 2. 山东高速高新科技投资有限公司, 山东 济南 250102)

**摘要:**采用静力法建立悬索桥桥塔纵桥向的平衡微分方程,引入相关边界条件,得到在竖向临界荷载下的稳定方程,为关于桥塔计算长度系数 $\mu$ 、塔顶纵桥向约束刚度与桥塔抗推刚度之比 $n$ 的超越方程。编制计算程序求得不同刚度比下桥塔计算长度系数的数值解,制成可供设计使用的计算表格并拟合了简化计算公式,可应用于悬索桥桥塔施工和成桥状态下的承载力能力验算,也可以应用于类似约束条件下受压柱的受力分析。计算结果表明:悬索桥缆索系统可大幅提高桥塔纵桥向的稳定性,空缆状态下桥塔的纵桥向计算长度系数达到0.9以下,成桥状态下桥塔的纵桥向计算长度系数接近0.7。

**关键词:**悬索桥; 桥塔; 纵桥向; 计算长度系数; 受力分析

**中图分类号:** U448.25

**文献标志码:** A

近年来,中国悬索桥的建设得到了快速发展,先后建成了近百座双塔甚至多塔悬索桥。桥塔是悬索桥五大部件之一,是传递竖向力至基础的关键部位<sup>[1-4]</sup>。桥梁建设过程中,桥塔需要承担桥面系及缆索系统的巨大轴力和主缆两侧的不平衡水平力,一般通过合理的施工控制(索鞍的预偏及回顶)来实现成桥状态桥塔接近轴心受力状态。因此,为确保桥梁顺利地建成和安全运营,如何合理地设计桥塔是悬索桥设计者关心的核心问题之一。悬索桥桥塔的设计主要是纵桥向的受力满足要求,即建立合适的模型来计算桥塔杆件的临界力,对工程结构而言也就是确定合理的杆件自由长度<sup>[5-7]</sup>。

国内外诸多学者已经开展了悬索桥桥塔计算长度系数取值的研究。许世展等<sup>[8]</sup>根据悬索桥主塔从裸塔、主缆施工、主梁吊装到成桥不同阶段的受力特点,将悬索桥主缆对主塔的约束作用简化为不同等效约束刚度的弹簧,利用静力法推导了带有弹簧约束的主塔模型稳定临界力计算公式,并给出中、边跨主缆约束刚度的计算公式及主缆对塔约束刚度的计算方法;刘恩吉<sup>[9]</sup>通过重庆市万州长江二桥桥塔设计分析,确定适用于该桥桥塔设计的纵向计算长度系数取为0.9;王翠宏<sup>[10]</sup>建立了主塔荷载位移矩阵方程,提出了一种简化分析模型,该方法可应用于悬索桥主塔的初步设计。

总体来看,悬索桥桥塔纵桥向计算时,一般认为:

① 裸塔状态下,桥塔的约束条件为下端固结、上端自

由的受压杆;② 成桥状态时,桥塔的约束条件为下端固结、上端铰接的受压杆,对于施工过程中桥塔的计算长度则根据经验取值,并按照弹性受压杆的力学模式进行桥塔的受力分析<sup>[11-12]</sup>。然而,悬索桥的建成需要经历一个复杂的过程(刚性桥塔一般需多次顶推鞍座,柔性桥塔需要预偏桥塔),主缆随着轴力的增加对桥塔塔顶的约束强度在不断地变化,桥塔的计算长度显然也在不断地变化。因此,有必要研究悬索桥桥塔的力学模式,得到不同状态下悬索桥桥塔纵桥向的计算长度系数。

## 1 桥塔的稳定方程

### 1.1 方程的建立

桥塔为偏心受压构件。桥塔基础一般采用群桩基础,塔底处的边界条件可视为在承台顶处固结;塔顶处需设置主索鞍,主缆卡在鞍槽内,且不允许主索鞍与主缆之间发生相对滑动,桥塔塔顶处纵桥向的约束为弹性约束,其刚度为缆索系统及其他桥塔(如有)在被研究桥塔处的塔顶水平约束刚度 $k$ 。桥塔的纵桥向受力状态可简化为图1所示的计算模型,不同的是塔顶水平约束刚度 $k$ 。

如图1所示,当塔顶轴力 $F_n$ 达到临界荷载时,桥塔的平衡路径将发生分支,即除可保持原直线形式的平衡状态外,还可能发生挠曲形式的平衡状态;在寻求

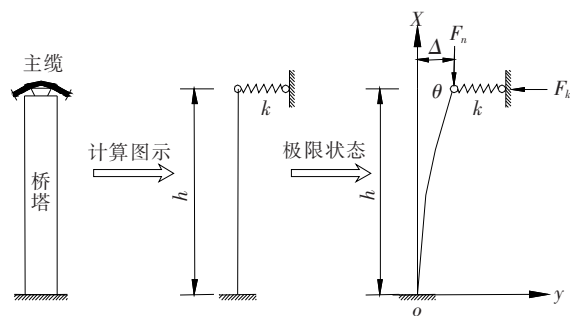


图1 桥塔纵桥向计算简图

平衡状态的分支点时,只要求杆件发生微小的挠曲,因此杆件的曲率可以用  $y''$  近似表示<sup>[13]</sup>。取任意截面上端隔离体为研究对象,其弯矩平衡方程可以表达为:

$$EIy'' = F_n(\Delta - y) - F_k(\Delta - x) \quad (1)$$

式中:  $F_k$  为塔顶水平弹性约束力;  $\Delta$  为墩顶水平位移;  $E$  为桥塔材料的弹性模量;  $I$  为桥塔的抗弯刚度;  $h$  为桥塔的高度。  $F_k$  可按式确定:

$$F_k = k\Delta \quad (2)$$

令:

$$\alpha^2 = \frac{F_n}{EI} \quad (3)$$

桥塔极限稳定荷载  $F_n$  的一般表达式为( $\mu$  为桥塔的计算长度系数)<sup>[9]</sup>:

$$F_n = \frac{\pi^2 EI}{(\mu\Delta)^2} \quad (4)$$

将  $F_n$  代入式(3)可得桥塔的计算长度系数  $\mu$  为:

$$\mu = \frac{\pi}{\alpha\Delta} \quad (5)$$

将式(1)两端除以  $EI$  并代入式(3)后可得:

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{1}{EI} [F_n\Delta - F_k(\Delta - x)] \quad (6)$$

方程的通解为:

$$y = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) + \Delta - \frac{F_k}{F_n}(\Delta - x) \quad (7)$$

代入式(2)及式(3)后可得:

$$y = A \cos(\alpha x) + B \sin(\alpha x) + \Delta - \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI}(\Delta - x) \quad (8)$$

引入位移边界条件为:  $x=0$  处,  $y=0$ 、 $y'=0$ ;  $x=\Delta$  处,  $y=\Delta$ ; 可得到一组关于未知参数  $A$ 、 $B$  和  $\Delta$  的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} A + \Delta - \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI} = 0 \\ \alpha B + \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$[A \cos(\alpha h) + B \sin(\alpha h) = 0]$$

要使参数  $A$ 、 $B$  和  $\Delta$  不全为零的条件是方程的系数行列式等于零,即:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 - \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI} \\ 0 & \alpha & \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI} \\ \cos(\alpha h) & \sin(\alpha h) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

展开上式可得关于  $\alpha h$  的超越方程:

$$\frac{k}{\alpha^2 EI} \tan(\alpha h) + \left(1 - \frac{k\Delta}{\alpha^2 EI}\right) \alpha = 0 \quad (11)$$

桥塔的抗推刚度  $k'$  为:

$$k' = \frac{3EI}{h^3} \quad (12)$$

令主缆在塔顶处的纵桥向刚度  $k$  与桥塔的抗推刚度  $k'$  之比为  $n$ :

$$n = \frac{k}{k'} \quad (13)$$

将式(12)、(13)代入式(11),可得:

$$\tan(\alpha h) + \frac{(\alpha h)^3 - 3n\alpha h}{3n} = 0 \quad (14)$$

## 1.2 方程的求解

式(14)即为桥塔的稳定方程,当刚度比  $n$  为确定值时,它是一个关于  $\alpha h$  的超越方程。稳定方程式(14)为多解方程,最小特征解对应着桥塔的计算长度系数取值。将方程(14)中两项看成不同的表达式:

$$F(\alpha h, 1) = \tan(\alpha h), F(\alpha h, 2) = -\frac{(\alpha h)^3 - 3n\alpha h}{3n} \quad (15)$$

在坐标图上绘出  $F(\alpha h, 1)$  及  $F(\alpha h, 2)$ , 即采用图2所示的图解法可以对式(14)进行求解。可以看出:当刚度比  $n$  接近于0时,  $F(\alpha h, 2)$  趋向于负无穷大,  $\alpha h$  的特征解无限接近于  $\pi/2$ , 此时桥塔计算长度系数的取值为2.0; 当刚度比  $n$  趋近于无穷大时,  $F(\alpha h, 2)$  可以简化成  $\alpha h$  的线性方式,  $\alpha h$  的特征解为4.879 9, 此时桥塔的计算长度系数取值为0.7。当  $\alpha h = \pi$  时, 桥塔的计算长度系数等于1.0, 此时刚度比  $n = \pi^2/3 = 3.290$ 。

编制计算程序并结合上述图解, 可求得不同刚度比  $n$  下悬索桥桥塔的纵桥向计算长度系数理论值见表1。

由表1可以看出: 随着主缆纵桥向刚度与桥塔抗推刚度之比  $n$  的增加, 桥塔的计算长度系数不断减少, 当刚度比  $n$  大于2时, 桥塔的计算长度系数减少幅度逐渐降低, 当刚度比  $n$  等于30时, 桥塔的计算长度系数为0.709, 已非常接近一端固定、一端自由受压柱计算长度系数的经典解0.7。

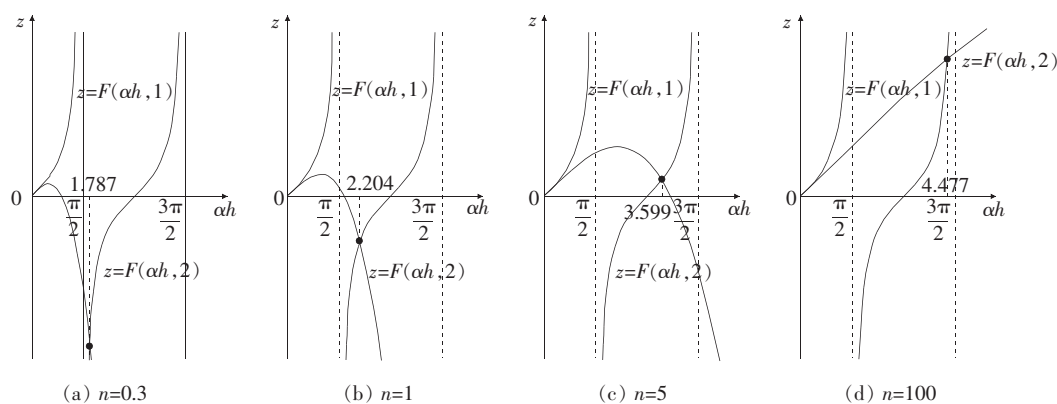


图 2 图解法计算示意图

表 1 不同刚度比下悬索桥桥塔纵桥向计算长度系数理论值

刚度比 $n$	计算长度 系数 $\mu$	刚度比 $n$	计算长度 系数 $\mu$
0	2.000	1.8	1.214
0.1	1.908	2.0	1.176
0.2	1.829	2.4	1.110
0.3	1.758	3.0	1.031
0.4	1.696	4.0	0.937
0.5	1.639	5.0	0.873
0.6	1.589	6.0	0.828
0.7	1.542	8.0	0.776
0.8	1.500	10.0	0.750
0.9	1.461	30.0	0.709
1.0	1.426	50.0	0.704
1.2	1.362	100.0	0.702
1.5	1.281	1 000.0	0.700

1.3 简化计算公式

为了方便工程应用,表 1 中数据可以拟合得到以下简化计算公式:

当  $n \leq 2.0$  时:

$$\mu = 2.0 - 0.779\,5n - 0.189\,8n^2 \tag{16}$$

当  $n > 2.0$  时:

$$\mu = 2.0 - (1.304\,6n^{1.5}) / (1.718\,6 + n^{1.5}) \tag{17}$$

式(16)与精确数据比较,均值为 0.997 0,方差为 0.011 4;式(17)与精确数据比较,均值为 0.999 8,方差为 0.009 8。

2 工程案例

2.1 工程简介

某悬索桥为主跨 800 m 的单跨钢箱梁地锚式悬索桥,主缆跨径布置为(260+800+260) m=1 320 m,全桥结构关于主跨中心线对称,桥梁立面布置图见图 3。桥塔采用门式塔、整体式承台及桩基础,桥塔总高度为 144.9 m;主缆采用高强度镀锌钢丝预制平行索股,为平面线形,矢跨比为 1/10,布置在钢箱梁两侧,每根主缆含有 109 根索股,每根索股由 127 根直径 5.2 mm 的钢丝组成;主梁采用钢箱梁断面,中心梁高 3.0 m。吊索基本间距为 12 m,桥塔两侧的吊索距桥塔中心线 10 m,共设置 66 对吊索。主梁一共分为 65 个梁段,桥塔处梁段长度为 16 m,跨中处梁段长度为 24 m,其余 62 个梁段长度均为 12 m。

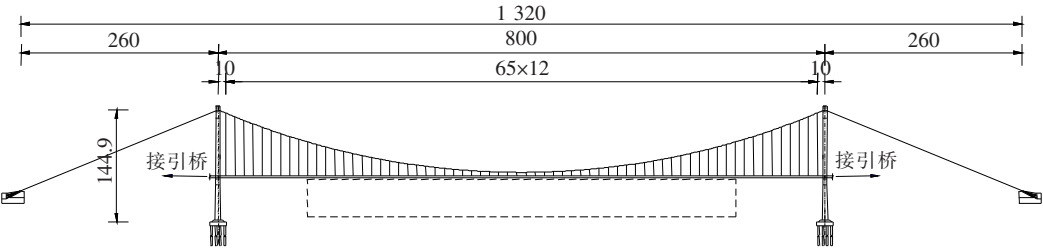


图 3 某悬索桥立面布置图(单位:m)

## 2.2 施工流程

### (1) 施工流程简述

悬索桥加劲梁最理想的内力状态为恒载全部由主缆承受,加劲梁在恒载状态下没有弯矩。受施工难度、施工环境、施工方法和施工架设顺序的影响,要实现理想状态的加劲梁内力较为困难。主梁常规的架设方法有逐段铰接施工法、逐段刚接施工法、刚铰混合施工法3种。

该桥主梁采用逐段铰接施工法的架设方法,在整个梁段吊装期间,梁段直接悬吊于吊索上,已吊好的梁段间采用弯曲刚度可以忽略的临时连接件进行铰接,铰位于主梁上翼缘。在加劲梁吊装完成前,加劲梁梁段间均为铰接,因而在此期间加劲梁段相互连接处无弯曲内力,但有剪力和较小的轴力,在桥梁建成后,梁段一期恒载全部由主缆承担,二期恒载在加劲梁各梁段间参与分配后再由吊索传递给主缆。

### (2) 主梁架设流程

主梁的架设采用缆索吊机吊装施工,由主跨跨中向两侧逐个梁段进行。根据前述介绍,全桥共分为65个梁段,主跨跨中梁段为0<sup>#</sup>梁段,往两侧对称依次为1<sup>#</sup>、2<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>、…、30<sup>#</sup>、31<sup>#</sup>、32<sup>#</sup>梁段,主梁架设共分为33个施工工序;施工时,在各梁段间采用铰接连接,待梁段全部架设完成后,由两侧向跨中逐段完成梁段间环焊缝;各梁段间刚接完成后,进行二期恒载施工,主要包括桥面铺装、护栏、灯座、检修设施等。

## 3 桥塔纵桥向计算长度研究

### 3.1 有限元计算模型

采用计算软件Midas建立全桥有限元计算模型。建模时,主缆、吊杆采用索单元,桥塔、主梁采用梁单元,桥塔塔底及主缆锚固端采用固定约束。建模具体流程如下:首先通过成桥状态平衡分析得到主缆及吊索的无应力长度<sup>[1]</sup>,然后按照施工过程建立全桥正装模型,共分为41个施工阶段,主要包括桥塔施工、主缆及猫道系统安装、由主跨跨中向两侧对称吊装主梁、梁段间固结、二期恒载施工、主索鞍锁定等工序。有限元计算模型见图4。

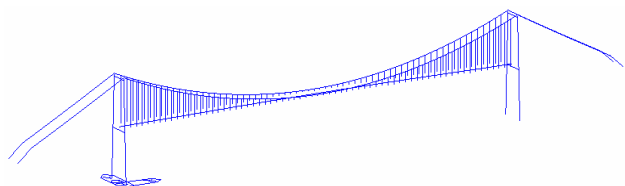


图4 有限元计算模型

### 3.2 计算结果

桥塔的水平抗推刚度利用桥塔独立模型采用单位力法可计算得到,得出该桥桥塔裸塔状态纵桥向抗推刚度为9 927 kN/m。以小桩号桥塔为研究对象,不同施工阶段小桩号桥塔塔顶处主缆的纵桥向刚度采用如下方法计算得到:该主梁节段架设完成后,采用纵桥向刚度非常大的刚臂将大桩号侧桥塔IP点处主缆节点与塔顶节点连接,小桩号侧桥塔IP点处主缆节点与塔顶节点连接纵桥向为纵向释放状态,在小桩号侧主缆IP点处施加水平力(需采用非线性分析,建议采用较大的水平力,该文采用值为100 kN),可计算出小桩号侧主缆IP点的位移,从而得到缆索的纵桥向约束刚度。通过桥塔处缆索系统纵桥向刚度与桥塔纵桥向抗推刚度的比值 $n$ ,利用前文的图解法可计算得到不同施工状态下该桥桥塔的纵桥向计算长度系数,具体见表2;需要说明的是,裸塔状态桥塔的受力模式为塔底固定、塔顶自由,根据受压柱计算长度系数的经典解,其计算长度系数取2.0。

由表2可以看出:对于该桥主跨800 m的地锚式悬索桥,空缆状态下桥塔的纵桥向计算长度系数为0.852,相比较于裸塔状态下的桥塔计算长度系数2.0,桥塔的稳定大大提高;随着主梁节段的不断架设,桥塔纵桥向计算长度系数不断地降低,当主梁节段6<sup>#</sup>架设完成时(此时,主梁已架设完成约20%),桥塔的纵桥向计算长度系数为0.732;成桥状态时,桥塔的纵桥向计算长度系数为0.718,说明后续梁段的架设对降低桥塔纵桥向计算长度系数影响不大,但已非常接近一端固定、一端铰接受压柱计算长度系数的经典解0.7。

### 3.3 几点讨论

通过工程案例分析可以看出,悬索桥桥塔具有如下特点:

(1) 工程案例的下塔柱较高,对于下塔柱较低的悬索桥,桥塔的纵桥向抗推刚度会较大,而缆索系统的刚度增幅不大,其刚度比 $n$ 会较小,不同施工工况下其计算长度系数会有所增加,但其成桥状态下计算长度系数一般在0.8以下。

(2) 对于自锚式悬索桥,主缆的矢跨比一般为地锚式悬索桥的1.5~2.0倍,其缆索系统的纵桥向刚度相比较于桥塔的纵桥向抗推刚度的降幅较大,其桥塔的纵桥向计算长度系数与地锚式悬索桥相比会有所增加。

(3) 悬索桥主缆一般采用两侧双缆或多缆布置,其桥塔横桥向一般设计成多层框架结构,即“门式桥塔”。对于“门式桥塔”悬索桥,塔柱的横桥向计算长度



表 2 施工过程中桥塔计算长度系数

施工工况	桥塔纵桥向刚度/(kN·m <sup>-1</sup> )	主缆纵桥向刚度/(kN·m <sup>-1</sup> )	刚度比 <i>n</i>	桥塔纵桥向 计算长度系数
裸塔状态		0	0	2.000 0
空缆状态		53 792	5.419	0.852 3
主梁节段 0 <sup>#</sup> 架设完成		66 667	6.716	0.805 0
主梁节段 3 <sup>#</sup> 架设完成		96 200	9.691	0.752 7
主梁节段 6 <sup>#</sup> 架设完成		127 877	12.882	0.731 7
主梁节段 10 <sup>#</sup> 架设完成		151 745	15.287	0.723 9
主梁节段 13 <sup>#</sup> 架设完成	9 927	160 772	16.196	0.721 8
主梁节段 16 <sup>#</sup> 架设完成		168 634	16.988	0.720 3
主梁节段 20 <sup>#</sup> 架设完成		170 068	17.133	0.720 0
主梁节段 23 <sup>#</sup> 架设完成		171 821	17.309	0.719 7
主梁节段 26 <sup>#</sup> 架设完成		173 310	17.459	0.719 4
主梁节段 30 <sup>#</sup> 架设完成		174 216	17.551	0.719 3
吊梁完成		175 439	17.674	0.719 1
成桥状态		179 533	18.086	0.718 4

一般可取横梁间的距离,根据该文的推导,设置 2~3 道横梁后,静力状态下塔柱一般为纵桥向控制设计。

4 结 论

采用静力法建立悬索桥桥塔纵桥向的弯矩平衡微分方程,给出不同刚度比下桥塔纵桥向计算长度系数的数值解并拟合了简化公式,通过对主跨为 800 m 的单跨地锚式悬索桥施工阶段桥塔纵桥向计算长度系数分析,得到以下结论:

- (1) 对于地锚式悬索桥,悬索桥缆索系统的架设可大幅提高桥塔纵桥向稳定性。
- (2) 对于常规的地锚式悬索桥,空缆状态下桥塔的纵桥向计算长度系数可达到 0.9 以下,随着主梁不断地架设,缆索系统的水平刚度会逐渐增大,成桥状态下桥塔的纵桥向计算长度系数可接近 0.7。
- (3) 随着悬索桥桥塔下塔柱高度的减小,桥塔的纵桥向计算长度系数会逐渐增大。
- (4) 该文的推导结果不仅可应用于悬索桥桥塔各种施工和成桥状态下的承载力能力验算,也可以应用于类似约束条件下受压柱的受力分析。

参考文献:

[1] 孟凡超,王仁贵,徐国平. 悬索桥[M]. 北京:人民交通出

版社,2011.

[2] 胡建华. 现代自锚式悬索桥理论与应用[M]. 北京:人民交通出版社,2008.

[3] 沈锐利,侯康,张新. 三塔四跨悬索桥合理结构布置形式研究[J]. 中外公路,2019,39(3):101—106.

[4] 陈林强,王立彬,李立斌. 基于振动特性的三塔悬索桥主缆损伤识别研究[J]. 中外公路,2018,38(4):116—121.

[5] 冯国瀚,陈进昌,雷俊卿. 桥塔约束刚度对单跨双缆悬索桥受力特性的影响[J]. 中外公路,2019,39(5):69—74.

[6] 戚瑞琨,庄冬利,肖汝诚. 桩柱式桥墩顺桥向计算长度系数的研究[J]. 中外公路,2016,36(2):192—195.

[7] 刘世忠,刘永健,李建红,等. 刚性悬索加劲钢桁梁桥塔柱纵向稳定计算长度系数研究[J]. 中国铁道科学,2012,33(6):17—22.

[8] 许世展,高传明,贺拴海,等. 悬索桥主塔纵向稳定的实用计算[J]. 长安大学学报(自然科学版),2005,25(1):41—43.

[9] 刘恩吉. 悬索桥桥塔纵向稳定性分析[J]. 世界桥梁,2009,37(2):45—47.

[10] 王翠宏. 悬索桥主塔的一种简化分析方法[J]. 中外公路,2017,37(4):67—72.

[11] 张兴标,沈锐利,张松涵,等. 多塔悬索桥中间桥塔结构顺桥向弹性稳定简化分析方法[J]. 世界桥梁,2016,44(6):69—73.

[12] 宋凯. 自锚式悬索桥主塔稳定计算方法及影响因素分析[J]. 城市道桥与防洪,2013(7):73—75.

[13] 朱慈勉. 结构力学[M]. 北京:高等教育出版社,2004.