

基于 TMD 的连续多跨曲线人行桥减振设计研究

陈杰, 艾辉林*, 王声云

(上海应用技术大学 城市建设与安全工程学院, 上海市 201418)

摘要:连续多跨曲线人行桥结构轻柔,人致振动问题突出,因而对其进行减振设计必不可少。该文运用 Ansys 有限元分析软件,根据某连续多跨曲线人行桥在不同人群作用下的振动响应情况,研究不同 TMD(调谐质量阻尼器)布置方案下各桥跨最大加速度响应的变化,评估 TMD 减振效果。结果表明:人群均布作用和非均布作用下的振动响应存在差别,减振设计时应考虑二者的最不利响应;曲线造型对侧弯振型下 TMD 的布置方向有影响,各桥跨应根据振型和响应情况确定合理的 TMD 布置方向;多跨布置 TMD 的减振效果与单跨布置 TMD 的减振率密切相关,总体上单跨布置 TMD 的减振效果较优。

关键词:多跨曲线桥;人致振动;TMD;减振效果

中图分类号:U441+.3 **文献标志码:**A

连续多跨曲线人行桥造型轻巧灵动,但低频、低阻尼的自身特点使其易在人行荷载作用下产生过度振动,严重影响行人的舒适性^[1]。而且,该类人行桥各桥跨之间存在相互作用,致使响应情况复杂,因而有必要采取合理的减振措施,以防发生不利的人致振动。人行桥常用的减振措施主要有两种:频率调整法和阻尼减振^[2]。频率调整法是指让结构的固有频率避开人行激励的频率敏感范围,通常需要提高结构刚度,这会显著增加结构质量,无法满足外观要求,且增加不必要的成本。调谐质量阻尼器(Tuned Mass Damper, TMD)是附加阻尼方法中的一种消能减振装置,已广泛应用于实际工程。Den Hartog^[3]最先研究 TMD 在无阻尼系统上的应用,并给出了求解 TMD 最优参数设计公式;孙利民等^[4-6]研究表明:TMD 系统能显著提高人行桥的舒适性;樊健生和邹卓等^[7-8]研究了 TMD 设计参数对减振效果的影响。对于连续多跨曲线人行桥,TMD 的安装策略对减振效果起着重要作用,已有研究多集中在 TMD 设计参数同减振效果的关系,而关于如何确定 TMD 的布置位置和数量的研究工作还不多,基于此,该文以文献[9]中的人行天桥为背景,着重研究连续多跨曲线人行桥分别采用单跨布置 TMD 和多跨布置 TMD 时二者减振效果的联系和差异。

1 人致振动分析

1.1 桥梁概况

此人行桥位于某金融中心的一个交叉路口,主桥跨径布置为(30+24+40+44+44+40)m,主梁为钢桁架结构,呈梭形形状,通过斜拉索与杯形桥塔相连,总体上形成多个桥塔悬挂多个梭形单元的“飘带”形态,如图 1 所示,与湛江世贸人行天桥^[10]有异曲同工之妙。各钢桁梁通过不同交角连接而成,桁架间轴线最大交角为 160°,最小交角为 124°,钢桁梁总高 2.0 m,最大宽度 5.15 m。桁架片之间采用月牙形立面过渡平台,总宽 3.15 m,与主桥桁架平面斜交。主桥基础采用 1.6 m 直径钻孔灌注桩基础。该人行桥地下管线复杂,且临近地铁线,应保证其有足够的安全性并能提供行人良好的舒适性。

1.2 结构动力特性分析

基于该桥设计资料,利用 Ansys 软件建立三维有限元模型,其中主梁、主塔和桥墩均采用 Beam4 空间三维梁单元模拟;拉索采用 Link10 单元,桥面采用 Shell63 单元,二期恒载采用 Mass21 单元模拟,并附加在主梁单元节点上。主缆与横梁连接采用约束方程处理,其预张力通过单元的初应变调整。边界条件为:

收稿日期:2021-04-14(修改稿)

基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号:51778365);上海市自然科学基金资助项目(编号:13ZR1441100)

作者简介:陈杰,男,硕士研究生。E-mail:229032879@qq.com

* 通信作者:艾辉林,男,博士,副教授。E-mail:mud2003@126.com

塔墩下端固结,主缆和抗风缆在锚固处铰接。成桥状态的有限元模型见图2,从桥头至桥尾按顺序为各桥跨编号。

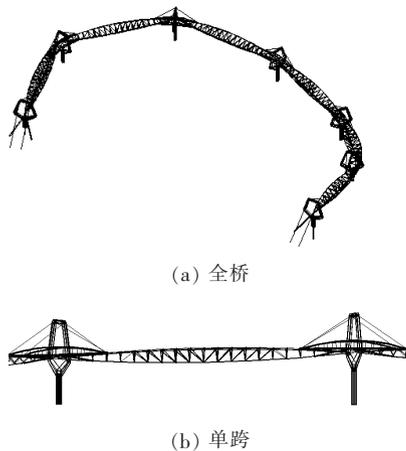


图1 人行桥示意图

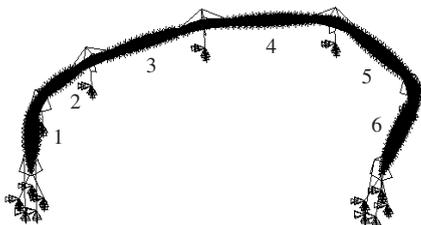


图2 成桥状态有限元模型

对成桥状态下的有限元模型进行动力特性分析,采用Block Lanczos方法求解,该方法是经典Lanczos的改进,用于求解大型系统的特征值问题,经计算得到该桥主要振型参数如表1所示,图3为对应的振型图。由表1可知:结构侧弯频率首先出现,且仅有0.601 Hz,中部4跨(2号、3号、4号和5号桥跨)在人行荷载作用下易发生侧向振动;1阶竖弯频率也只有1.571 Hz,天桥的后4跨(3号、4号、5号和6号桥跨)易出现竖向人致振动。该桥主要自振频率接近或落入行人步频的敏感范围(竖向为1.6~2.4 Hz,侧向为0.8~1.2 Hz),易在人群激励下发生不利振动,有必要对上述提取的全部模态进行人致振动分析论证。

表1 结构动力特性参数

模态	自振频率/Hz	振型描述
1阶	0.601	1阶侧弯
2阶	0.867	2阶侧弯
3阶	1.571	1阶竖弯
5阶	2.049	2阶竖弯

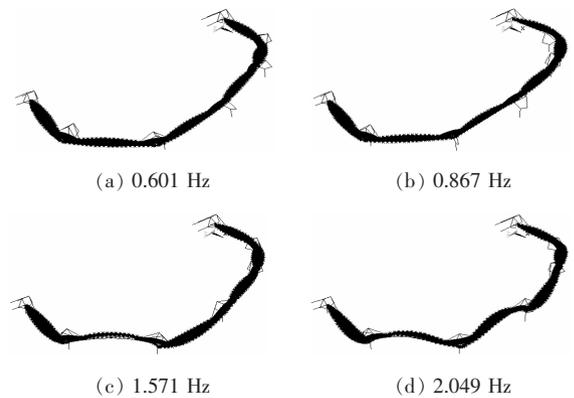


图3 人行桥振型图

1.3 舒适度评价

文献[11]认为结构竖向加速度达到 0.55 m/s^2 便会使行人感到不安,影响行人的舒适性。行人对竖向振动和侧向振动的敏感程度并不一样,对侧向振动的敏感性更强,故结构竖向和侧向加速度的限值应分开考虑。德国人行桥设计指南EN 03(2008)[12]依据行人承受的竖向和侧向峰值加速度将舒适度划分成不同等级,如表2所示。

表2 EN 03(2008)规定的舒适度等级

等级	舒适度	峰值加速度/ $(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$	
		竖向	侧向
CL1	最好	<0.50	<0.10
CL2	中等	$0.50 \sim 1.00$	$0.10 \sim 0.30$
CL3	差	$1.00 \sim 2.50$	$0.30 \sim 0.80$
CL4	不可接受	>2.50	>0.80

德国EN 03(2008)采用的行人脚步荷载模型为:

$$p(t) = P \cos(2\pi f_s t) \times n' \times \psi \quad (1)$$

式中: P 为步频 f_s 时对应的单人步行荷载幅值; n' 为加载面积为 S 时的等效行人密度,计算公式见式(2); ψ 为折减系数,该文偏保守考虑取1.0。

$$n' = \begin{cases} \frac{10.8 \times \sqrt{\xi \times S \times d}}{S}, & d < 1.0 \\ \frac{1.85 \times \sqrt{S \times d}}{S}, & d \geq 1.0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: ξ 为结构阻尼比,该文取0.5%; d 为人群密度。

根据德国EN 03(2008)对不同交通级别的人群密度划分,在分析全桥人群均布作用时,偏安全考虑,取最大人群密度 $d_1 = 1.5 \text{ 人/m}^2$,即此时交通异常繁忙,记为工况1。由于该人行桥具有多个桥跨,各桥跨上的人流量在实际中不会完全相同,某一桥跨可能会因

欣赏景色较佳而出现人群聚集现象,此时这一桥跨的人群密度可能会远大于其他桥跨,为防止发生严重的人致振动,需要对这种人群非均布作用的情况进行分析。通过对各桥跨设置不同的人群密度来模拟天桥上的非均布人群,将人流量大的桥跨取人群密度 $d_1 = 1.5$ 人/ m^2 ,人流量小的桥跨取 $d_2 = 0.5$ 人/ m^2 ,限于篇幅,该文仅取侧弯和竖弯振型比较显著的第 3 号桥跨为人群聚集桥跨,即该桥跨的人群密度为 $d_1 = 1.5$ 人/ m^2 ,其余桥跨的人群密度均为 $d_2 = 0.5$ 人/ m^2 ,记为工况 2。将各桥跨上对应的等效均布荷载按结构振动最不利方向加载到相应结构单元上,计算人群共振荷载作用下工况 1、2 中各桥跨的最大加速度响应,结果见表 3。

表 3 各桥跨加速度响应

工况	桥跨	不同模态的加速度/ $(\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$			
		1 阶	2 阶	3 阶	5 阶
1	1 号	0.050	0.033	0.008	0.020
	2 号	0.129	0.050	0.005	0.059
	3 号	0.178	0.044	0.024	0.245
	4 号	0.163	0.080	0.026	0.205
	5 号	0.166	0.028	0.027	0.244
	6 号	0.090	0.034	0.019	0.236
2	1 号	0.045	0.033	0.021	0.047
	2 号	0.114	0.051	0.042	0.232
	3 号	0.157	0.045	0.218	0.939
	4 号	0.144	0.084	0.647	0.878
	5 号	0.147	0.028	0.731	1.012
	6 号	0.079	0.035	0.350	0.913

由表 3 可得:侧弯基频(0.601 Hz)下,无论是工况 1 人群均布作用还是工况 2 非均布作用,中部 4 跨的侧向加速度均超过 0.1 m/s^2 ,属于中等舒适性。第 3 阶和第 5 阶频率下,工况 1 中的竖向加速度响应均小于 0.5 m/s^2 ,舒适性最好;但是在工况 2 人群非均布作用下,部分桥跨的竖向加速度响应超过 0.5 m/s^2 ,如第 3 阶频率中的 4 号、5 号桥跨,以及第 5 阶频率中天桥的后 4 跨,其中 5 号桥跨甚至达到 1.012 m/s^2 ,舒适性差。可见人群非均布作用会显著增加人行桥的竖向加速度响应,对行人的舒适性造成严重影响,因此,连续多跨曲线人行桥在减振设计时应人群聚集现象给予重视。

2 TMD 减振

根据 Den Hartog 理论,当以加速度最小为优化目标时,TMD 参数设计公式如式(3)~(8)所示:

$$m_d = \mu \times \widetilde{M}_j \quad (3)$$

$$k_d = (2\pi f_d)^2 \times m_d \quad (4)$$

$$c_d = 2m_d \times 2\pi f_d \times \xi_{\text{opt}} \quad (5)$$

$$f_d = \alpha_{\text{opt}} \times f_s \quad (6)$$

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1}{1+\mu}} \quad (7)$$

$$\xi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}} \quad (8)$$

式中: m_d 、 k_d 、 c_d 、 f_d 分别为 TMD 质量、刚度、阻尼、频率; α_{opt} 为最优频率比; ξ_{opt} 为最优阻尼比; μ 为质量比; \widetilde{M}_j 为第 j 阶模态广义质量; f_s 为减振模态的频率。

2.1 侧向振动

根据表 3 得知:侧弯基频下,在工况 1,即人群均布作用时的加速度响应最大,所以应对工况 1 的 1 阶侧弯模态进行 TMD 减振设计。由于天桥的中部 4 跨加速度响应较大,舒适性为中等,故着重考虑在这 4 个桥跨布置 TMD。以质量比 0.005 计算所得的 TMD 参数为初始值,结合实际情况进行优化,最终取 TMD 总质量为 2 200 kg,TMD 总刚度为 31 200 N/m,总阻尼为 $720 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。各桥跨最多在跨中布置 1 个 TMD 抑制横向振动(该文不讨论 1 个桥跨布置多个 TMD 的情形)。当仅在 1 个桥跨布置 TMD 时,则该 TMD 质量取总质量 2 200 kg(若在多个桥跨布置 TMD,则各桥跨上 TMD 的质量初步按总质量除以 TMD 数量进行平均分配),TMD 的具体布置位置如表 4 所示,计算附加 TMD 后各桥跨加速度响应及各 TMD 布置方案对应的减振率亦示于表 4 中。

由表 4 可得:① 除在 4 号桥跨布置 TMD 方案外,其余方案均能使各桥跨侧向加速度降至 0.1 m/s^2 以下,舒适度达到最好等级,可见在连续多跨曲线人行桥上布置 TMD 是一种有效的减振措施;② 在同一种 TMD 安装方案里,由于桥跨之间的耦合作用,各桥跨的减振率相差 5%左右,差异不是十分明显;但不同的 TMD 布置方案产生的减振效果差别很大,如仅在 3 号桥跨布置 TMD 时,减振率在 65%以上,而在 4 号桥跨布置 TMD 时,减振率只有 28%左右,减少了 37%;

表4 附加TMD后各桥跨侧向加速度响应及减振率

TMD位置	不同桥跨的侧向加速度/($m \cdot s^{-2}$)						不同桥跨的减振率/%					
	1号	2号	3号	4号	5号	6号	1号	2号	3号	4号	5号	6号
2号	0.024	0.062	0.086	0.079	0.080	0.043	51.50	51.78	51.88	51.90	51.78	52.11
3号	0.017	0.044	0.061	0.056	0.057	0.031	65.28	65.57	65.70	65.72	65.63	65.82
4号	0.036	0.093	0.128	0.118	0.120	0.064	27.19	27.71	27.98	28.08	27.89	28.49
5号	0.022	0.057	0.078	0.071	0.073	0.039	55.88	56.16	56.27	56.32	56.19	56.51
2号、4号	0.029	0.075	0.103	0.094	0.096	0.051	42.31	42.12	42.33	42.26	42.31	42.81
3号、4号	0.023	0.060	0.083	0.076	0.077	0.042	53.28	53.14	53.33	53.28	53.32	53.74
3号、5号	0.019	0.050	0.068	0.063	0.064	0.034	61.53	61.44	61.61	61.55	61.61	61.95
4号、5号	0.027	0.071	0.097	0.089	0.091	0.049	45.39	45.22	45.45	45.39	45.44	45.92
2号、3号、4号	0.024	0.061	0.084	0.077	0.078	0.042	52.90	52.74	52.94	52.88	52.92	53.34
2号、4号、5号	0.029	0.075	0.103	0.094	0.096	0.052	42.19	42.00	42.22	42.15	42.20	42.70
2号、3号、4号、5号	0.025	0.064	0.088	0.081	0.082	0.044	50.39	50.24	50.45	50.38	50.43	50.86

③ 多跨布置 TMD 与单跨布置 TMD 之间的减振率存在关联,如在 3 号和 4 号桥跨同时布置 TMD 时,其减振率处于 3 号、4 号桥跨仅单跨布置 TMD 的减振率之间;3 号和 5 号桥跨同时布置 TMD 时,其减振率处于 3 号、5 号桥跨仅单跨布置 TMD 的减振率之间,即多跨布置 TMD 的减振率是相应桥跨单跨布置 TMD 减振率的组合。再如 4 号和 5 号桥跨同时布置 TMD 的减振率低于 3 号和 5 号桥跨同时布置 TMD 的减振率。因为 3 号桥跨单跨布置 TMD 的减振率要高于 4 号桥跨单跨布置 TMD 的减振率。同理可以解释 2 号、3 号和 4 号桥跨同时布置 TMD 时,减振率高于 2 号和 4 号桥跨同时布置 TMD,以及 2 号、3 号、4 号和 5 号桥跨同时布置的减振率高于 2 号、4 号和 5 号桥跨同时布置 TMD,因为它们都将一部分 TMD 性能用于减振率最高的 3 号桥跨布置 TMD。因此,对于连续多跨曲线人行桥,依据单跨布置 TMD 的减振率进行组合,可预估多跨布置 TMD 的减振率,为多跨 TMD 的布置位置提供参考。

根据上述分析可推断,TMD 总质量、总刚度及总阻尼相等时,TMD 的最大减振率应在单跨布置 TMD 时得以实现。因为单跨布置 TMD 会将所有 TMD 性能用于减振率最高的某一桥跨,此时减振效果最好;多跨布置 TMD 时,则将一部分 TMD 性能用于减振率较低的桥跨,影响减振效果。表中的计算结果也验证

了这一结论。

通过自振分析发现:该人行桥侧弯振动时,各桥跨的运动方向主要有两种:横桥跨方向和顺桥跨方向,曲线造型使处于同一侧弯振型下的不同桥跨在这两方向的运动程度有较大差异,例如侧弯基频下,2 号桥跨主要沿横桥向运动,3 号桥跨在横桥向和顺桥向运动大致各占一半,4 号桥跨主要沿顺桥向运动。因而 4 号桥跨上的 TMD 并不适合像 2 号和 3 号桥跨那样沿横桥向布置,应改为在跨中沿顺桥跨方向安装,此时若仅 4 号桥跨布置 TMD,则各桥跨的加速度响应如图 4 所示。显而易见,4 号桥跨顺桥向布置 TMD 时,各桥跨的加速度响应远低于横桥向布置 TMD 的结果,TMD 的减振率已达 72%,较之前的 28% 提高了 44%,可见 TMD 的布置方向对减振效果有重要影响。所以,对于类似的曲线人行桥,即使是同一阶侧弯频率,也应按

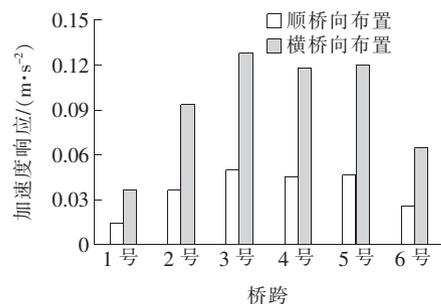


图4 4号跨沿不同方向布置TMD后的加速度响应

照各桥跨的具体振型和振动响应情况选择 TMD 的布置方向,以充分发挥 TMD 的减振性能。

2.2 竖向振动

由表 3 可知:在人群非均布作用时,桥跨的竖向加速度响应较大,如第 5 阶频率,1~6 号桥跨在人群非均布作用下的加速度较人群均布作用分别提高 135%、293%、283%、328%、315%、287%,且天桥后 4 跨的加速度均超过 0.5 m/s^2 ,应降低这些桥跨的振动响应,提高舒适性。针对第 5 阶模态设计 TMD,取 TMD 总质量为 2 400 kg,若多跨布置则平均分配质量,仍然按各桥跨最多布置 1 个 TMD,且布置在跨中。分别计算 3 号、4 号、5 号和 6 号桥跨仅单跨布置 TMD 时各桥跨的最大加速度响应结果(如表 5 所示)。由表 5 可知:仅 6 号桥跨单跨布置 TMD 时有部分桥跨的加速度仍在 0.5 m/s^2 以上,其余 3 种布置方案均使各桥跨的加速度降至 0.5 m/s^2 以下。

表 5 单跨布置 TMD 的减振率

TMD 位置	不同桥跨的减振率/%					
	1号	2号	3号	4号	5号	6号
3号	50.85	52.80	52.73	51.97	52.32	52.81
4号	46.60	51.16	51.25	52.76	53.08	53.19
5号	50.64	53.53	53.50	50.18	54.38	54.55
6号	38.94	42.28	42.29	41.73	42.69	42.65

根据前述结论,由单跨布置 TMD 的减振率先预估多跨布置 TMD 的减振率,再通过计算验证。第 5 号桥跨竖向加速度响应超过 1.0 m/s^2 ,舒适性差,需重点考虑该桥跨减振情况,故以 5 号桥跨上各单跨布置 TMD 的减振率为依据,预估多跨布置 TMD 时 5 号桥跨的减振率。可以预判的是:4 号和 5 号两个桥跨同时布置 TMD 比其余任意两跨同时布置 TMD 的减振效果要好,且减振率为 52.32%~54.38%;3 号、4 号和 5 号 3 个桥跨同时布置 TMD 比 3 号和 4 号两个桥跨同时布置 TMD 的减振效果好,同时也优于 3 号、4 号、5 号和 6 号 4 个桥跨同时布置 TMD。限于篇幅,仅对以上预测进行验证,结果如图 5 所示。

由图 5 可以看出计算结果与预测基本吻合。对于多跨布置 TMD,若需更准确的预测结果,则可从多角度进行评估,比如 3 号、4 号和 5 号桥跨同时布置 TMD,其减振效果不仅可以依据 3、4 号两跨布置和 5 号单跨布置减振率的组合,也可以是 3、5 号两跨布置

和 4 号单跨布置组合以及 4、5 号两跨布置和 3 号单跨布置组合,当然最后仍需进行计算验证。

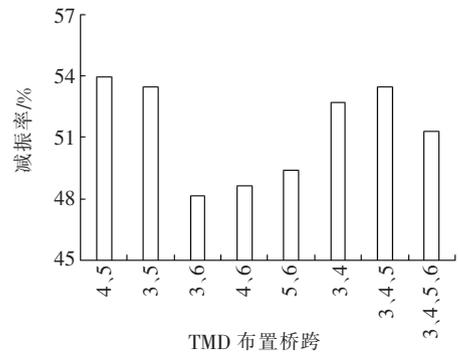


图 5 多跨布置 TMD 时 5 号桥跨的减振率

从表 5 可以看出:在不同桥跨上单跨布置 TMD 时减振效果存在差别,如分别在 3 号和 6 号桥跨布置 TMD 时,二者在 4 号桥跨上的减振率相差近 10%。由表 3 加速度计算结果可得:6 号桥跨的加速度响应比 4 号桥跨高 4%,然而单跨布置 TMD 时的减振效果却低了约 10%,由此可知:采用多桥跨布置 TMD 方案,若按加速度响应分配 TMD 质量或者平均分配 TMD 质量可能略有不足。该文建议按照单跨布置 TMD 的减振率分配各桥跨上 TMD 的质量,以天桥的后 4 跨同时布置 TMD 为例,TMD 总质量仍为 2 400 kg,若以 5 号桥跨上各单跨布置 TMD 的减振率为依据分配 TMD 质量,则 3 号、4 号、5 号和 6 号桥跨的 TMD 质量分别为 620 kg、629 kg、645 kg、506 kg;若按这些桥跨的最大加速度响应分配 TMD 质量,则所得质量分别为 602 kg、563 kg、649 kg、586 kg;若平均分配质量,则各 TMD 质量均为 600 kg。计算这 3 种不同 TMD 质量分配方案下各桥跨的最大加速度响应,得到不同方案的减振率如图 6 所示。

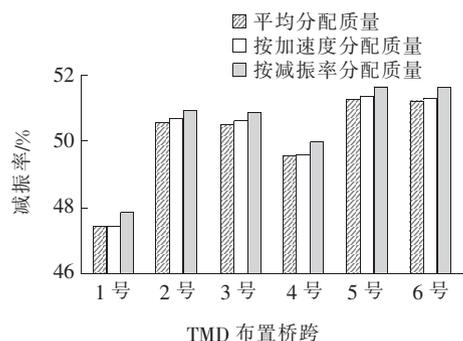


图 6 不同 TMD 质量分配下的减振率

由图 6 可见:按单跨布置 TMD 的减振率分配 TMD 质量比平均分配 TMD 质量或者按加速度响应

分配 TMD 质量的减振效果略好。因而多跨布置 TMD 时,根据单跨布置 TMD 的减振率分配 TMD 质量不失为一种有效方案。

3 结论

以某连续多跨曲线人行桥为例,分别计算了该桥在人群均布作用和非均布作用下的人致振动响应,研究了布置 TMD 后的减振效果,得出以下主要结论:

(1) 对于连续多跨曲线人行桥,TMD 安装位置和数量的不同带来的减振效果存在明显差异,但在同一种 TMD 安装方案中,因桥跨之间相互耦合,各桥跨的减振率总体上相差不大。

(2) 根据单跨布置 TMD 的减振率可预估多跨布置 TMD 的减振效果,方便确定安装 TMD 的位置,且从多角度分析多跨布置 TMD 的减振率可提高评估的准确性,不过最后仍应通过计算进行验证确保安全。

(3) 由于桥梁曲线造型不同,同一阶侧弯频率下各桥跨在顺桥向和横桥向运动的参与程度不同,因而 TMD 在两个方向上的减振效果会有差别,针对侧向振动减振设计时应注意各桥跨上 TMD 的布置方向。

(4) 对于连续多跨曲线人行桥,TMD 总参数值相等时,仅在某一桥跨上布置 TMD 可获得最好的减振效果;若采用多跨布置 TMD,建议按单跨布置 TMD 的减振率分配各桥跨上 TMD 的质量。

参考文献:

[1] SANTOS da Silva J G, FONTENLA Sieira A C C, DEB-

ONA G L. Analysis of the Dynamic Behaviour of Steel-Concrete Composite Footbridges Considering the Soil-Structure Interaction[J]. International Journal of Engineering Research and Application, 2016, 6(11): 11-19.

[2] 陈政清,华旭刚.人行桥的振动与动力设计[M].北京:人民交通出版社,2009.

[3] DEN Hartog J P. Mechanical Vibrations[M]. 3rd edition. New York: McGraw-Hill, 1947: 125-132.

[4] 孙利民,杨伟,于军峰,等.空间曲梁单边悬索桥的振动舒适性评估及减振设计[J].建筑施工,2015(12):1 345-1 348.

[5] 徐海军,戎华钦,高星亮,等.大跨度曲线人行桥人致振动分析与耦合振动控制研究[J].中外公路,2016,36(4): 225-230.

[6] 钱骥,孙利民.大跨径人行桥人致振动舒适性评估及减振措施[J].上海交通大学学报,2011,45(5):677-681.

[7] 樊健生,陈宇,聂建国.人行桥的 TMD 减振优化设计研究[J].工程力学,2012,29(9):133-140,156.

[8] 邹卓,宋旭明,李璋,等.基于 TMD 的自锚式人行悬索桥人致振动控制研究[J].铁道科学与工程学报,2018,15(10):2 574-2 582.

[9] 艾辉林,陈杰,王声云.连续多跨曲线桁架桥主梁静气动参数研究[J].结构工程师,2019,35(5):141-147.

[10] 褚东升,赵国栋,曾革助.空间异形桁架人行天桥设计与计算[J].中外公路,2017,37(5):127-130.

[11] BACHMANN H, PRETLOVE A, RAINER H. Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines[M]. Basel: Birkhauser Verlag, 1995: 215-216.

[12] EN 03. Design of Footbridge Guideline[S]. Germany: Background Document, 2008.