

悬索桥鞍座设计位置计算的改进方法

邓小康, 邓恒耀

(武汉科技大学 汽车与交通工程学院, 湖北 武汉 430081)

摘要:基于对悬索桥主缆和索鞍的几何、力学关系分析,利用索鞍和主缆的几何相容条件建立方程,采用二分法求解方程得到索鞍的设计位置,避免了传统方法采用牛顿—拉斐森法求解八元非线性方程组的复杂计算。该文提出的索鞍位置改进算法精度良好,计算简单,整个计算过程无需任何初值,均可保证求解收敛。

关键词:悬索桥; 几何相容; 索鞍设计位置; 二分法

中图分类号: U448.25

文献标志码: A

索鞍是悬索桥的重要构件,其主要作用包括两个方面:一是实现主缆的转向,二是为主缆提供支撑^[1]。索鞍位置的安放是否准确将严重影响悬索桥的线形和结构受力^[2],索鞍的偏离有时甚至会引起桥塔偏位,使塔底产生弯矩,影响桥塔安全^[3],同时索鞍位置参数的确定,也是主缆长度修正的先决条件^[4]。

唐茂林^[5]通过主缆的线形方程及索鞍与主缆的几何关系对该问题进行了求解分析,但其方程有8个未知数,需要通过牛顿—拉斐森法求解非线性方程组,计算繁琐且对计算初值的选取也有一定的要求;李传习^[6]采用分离算法进行精确计算,但仍需通过牛顿—拉斐森法求解方程且对鞍座设计位置需给出其约束条件和迭代初值。

该文基于对悬索桥主缆和索鞍几何、力学关系的分析,利用索鞍和主缆几何相容条件建立方程,采用二分法求解方程即可得到索鞍的设计位置,计算简单,整个计算过程无需任何初值,均可保证求解收敛。

1 统一主缆线形方程的提出

1.1 主缆最低点的确定

当悬索桥主塔高度相等时,由于主缆具有对称性,此时主缆最低点(同时也是主缆斜率最小点)应位于主缆的跨中位置。

当悬索桥主塔高度不相等时(一侧比另一侧高 h),主缆最低点会向较低的主塔一侧偏移,如图1所示^[7]。文献^[8]中推导出了该种情况下主缆最低点位置的计算

方法,提出可以在各索段或吊点采用二分法确定最低点的位置和最低点左、右两侧主缆的斜率。

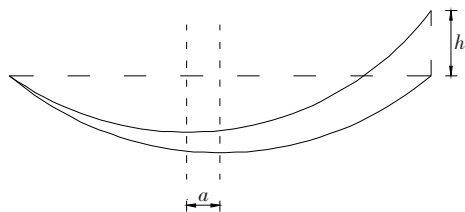


图1 主塔不等高时最低点变化示意图

1.2 两种坐标系的建立

如图2所示,对跨径为 L 的主缆以最低点 A (即全桥主缆的斜率最小点,位置待求)为界,左边 $m-1$ 个吊杆将主缆分为 m 段,右边 $n-1$ 个吊杆将主缆分为 n 段。令左边主缆垂度为 f_1 ,跨径为 L_1 ;右边主缆垂度为 f_2 ,跨径为 L_2 。索段的受力情况是:索段两端承受吊杆传来的集中力 P ,中间承受沿索长均匀分布的主缆自重 q 。

以最低点 A 为原点, y 轴竖直向上,左边 x 轴水平向左,右边 x 轴水平向右建立坐标系 I 。

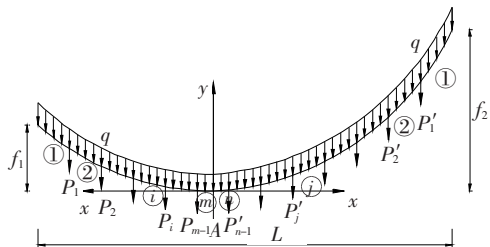


图2 坐标系I下的索段划分示意图

在坐标系 I 下,索段曲线为分段悬链线^[9],主缆在

吊杆位置出现斜率突变,从而表现为主缆斜率不连续。

对任意索段 i , 将其坐标系原点移至索段曲线上斜率为 0 的位置 (各索段坐标系原点应为同一点), x 轴、 y 轴的方向同前述所示, 建立坐标系 II^[8]。此时各索段 i 出现曲线平移, 主缆在吊杆位置不再表现为斜率突变, 而是出现平移, 曲线平移的距离由吊杆处的斜率变化值决定, 如图 3 所示。

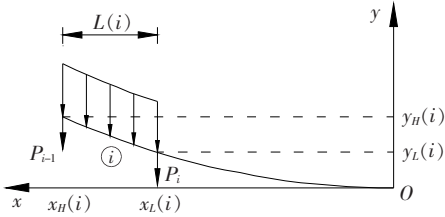


图 3 坐标系 II 下的索段示意图

1.3 主缆线形的统一悬链线方程

作者在前期研究过程中, 已求出在坐标系 II 下主缆的统一线形方程。

定义索段上任一点的斜率为 z ; 假定在无应力状态下主缆的横截面面积为 A_0 , 沿索长均布的主缆自重荷载为 q_0 , 主缆所用材料的弹性模量为 E , H 为索段上任一点索力的水平分力。

对任意索段均有:

$$x = \frac{H^2 z}{EA_0 q_0} + \frac{H}{q_0} \ln(z + \sqrt{1+z^2}) \quad (1)$$

$$y = \frac{H^2 z^2}{2EA_0 q_0} + \frac{H}{q_0} \sqrt{1+z^2} - \frac{H}{q_0} \quad (2)$$

式(1)、(2)就是坐标系 II 下的统一主缆线形方程^[8]。

2 主索鞍位置计算

悬索桥理论顶点(IP 点)的定义有多种, 一种是设计基准温度下成桥状态索鞍两侧主缆离合点切线的交点; 第二种是设计基准温度下成桥状态索鞍两侧主缆离合点顺延悬链线的交点^[10]。该文选取第二种定义进行分析计算。理论顶点左右两边主缆的线形一经确定, 则一个给定半径且与这两条曲线相切的圆有 4 个 (上、下、左、右), 只要给定约束条件就能获得所需要的索鞍位置^[11]。

对主索鞍位置进行计算时, 其问题归纳为已知主缆的横截面面积为 A , 弹性模量为 E , 主缆沿索长均布的自重集度为 q 。在坐标系 I 下主缆理论顶点的坐标为 (x_0, y_0) , 索鞍左边主缆索力的水平分力为 H_1 , 索

鞍右边主缆索力的水平分力为 H_2 , 左边主缆在顶点位置的斜率为 z_1 , 右边主缆在顶点位置的斜率为 z_2 , 给定索鞍的半径 R ; 理论顶点在左边坐标系 II 下的坐标为 (x'_0, y'_0) , 在右边坐标系 II 下的坐标为 (x''_0, y''_0) 。右切点的斜率为 z_3 , 左切点的斜率 z_4 。要求主缆曲线与索鞍的左切点坐标 (x_1, y_1) , 右切点坐标 (x_2, y_2) , 鞍座曲线圆心的坐标 (x_3, y_3) 。

令理论顶点到左切点的水平距离为 L_1 , 垂直距离为 h_1 , 到右切点的水平距离为 L_2 , 垂直距离为 h_2 。 θ_1 为索鞍圆心到主跨切点的连线与过圆心的铅垂线的夹角, θ_2 为索鞍圆心到边跨切点的连线与过圆心的铅垂线的夹角。

计算图示如图 4、5 所示。

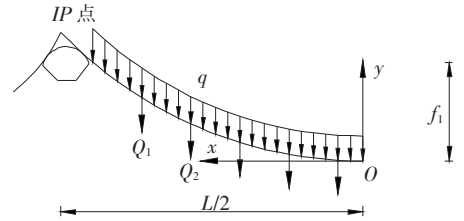


图 4 主索鞍整体计算示意图

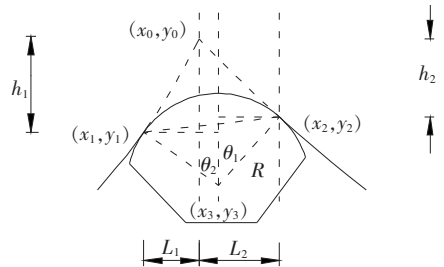


图 5 主索鞍局部计算示意图

在图 5 中, 由几何关系及切线的定义可知:

$$\tan \theta_1 = z_3, \tan \theta_2 = z_4 \quad (3)$$

左、右切点在水平方向的距离应等于两点分别到过圆心的铅垂线的水平距离之和:

$$L_1 + L_2 = R \sin \theta_1 + R \sin \theta_2 \quad (4)$$

将式(3)代入得:

$$L_1 + L_2 = R \left(\frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} + \frac{z_4}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (5)$$

将 z_3 代入式(1)可得右切点在右边坐标系 II 下的横坐标:

$$x_2'' = \frac{H_2^2 z_3}{EAq} + \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) \quad (6)$$

则:

$$L_2 = x_0'' - x_2'' = x_0'' - \frac{H_2^2 z_3}{EAq} - \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) \quad (7)$$

将 z_4 代入式(1)可得左切点在左边坐标系 II 下的横坐标:

$$x_1' = \frac{H_1^2 z_4}{EAq} + \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) \quad (8)$$

则:

$$L_1 = x_0' - x_1' = x_0' - \frac{H_1^2 z_4}{EAq} - \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) \quad (9)$$

将式(8)、(9)代入式(4)可得:

$$x_0' - \frac{H_1^2 z_4}{EAq} - \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) + x_0'' - \frac{H_2^2 z_3}{EAq} - \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) = R \left(\frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} + \frac{z_4}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (10)$$

式(10)中仅 z_3 和 z_4 为未知数,已知 z_3 即可通过求解一元非线性方程的方法求得 z_4 。对给出的 z_3 (给出的 z_3 的范围为所在索段最低点的斜率 z_2),取 z_4 的求解区间为 $[0, z_1]$,二分法求式(10)即可得 z_4 。

z_4 可以看作:

$$z_4 = f(z_3) \quad (11)$$

由几何关系可得:

$$h_1 - h_2 = R \cos \theta_1 - R \cos \theta_2 \quad (12)$$

将式(3)代入式(12)得:

$$h_1 - h_2 = R \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (13)$$

将 z_3 代入式(2)可得右切点在右边坐标系 II 下的纵坐标:

$$y_2'' = \frac{H_2^2 z_3^2}{2EAq} + \frac{H_2}{q} \sqrt{1+z_3^2} - \frac{H_2}{q} \quad (14)$$

理论顶点和右切点的高差:

$$h_2 = y_0'' - y_2'' \quad (15)$$

将 z_4 代入式(2)可得左切点在左边坐标系 II 下的纵坐标:

$$y_1' = \frac{H_1^2 z_4^2}{2EAq} + \frac{H_1}{q} \sqrt{1+z_4^2} - \frac{H_1}{q} \quad (16)$$

理论顶点和左切点的高差:

$$h_1 = y_0' - y_1' \quad (17)$$

将式(15)和式(17)代入式(13)可得:

$$y_0' - \frac{H_1^2 z_4^2}{2EAq} - \frac{H_1}{q} \sqrt{1+z_4^2} + \frac{H_1}{q} - y_0'' + \frac{H_2^2 z_3^2}{2EAq} + \frac{H_2}{q} \sqrt{1+z_3^2} - \frac{H_2}{q} = R \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (18)$$

式(18)中, z_4 可以用 z_3 来表示[见式(11)],其余参数均为常数,故式(18)可看作为关于 z_3 的一元非线性方程。采用二分法求解式(18)时, z_3 的求解范围可取为所在索段最低点的斜率 z_2 。主索鞍与鞍座左、右两边切点斜率计算的过程如图6所示。

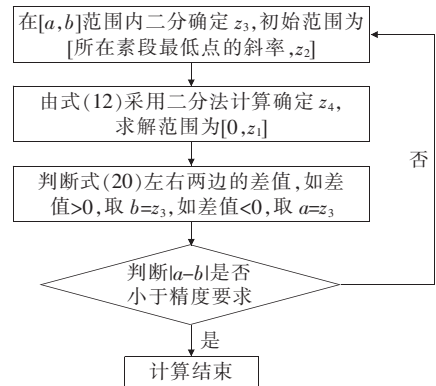


图6 主索鞍与鞍座左、右两边切点斜率计算流程

如此便可确定左切点和右切点的斜率,上述方法最后一次的迭代过程还求出了理论顶点到左切点的水平距离为 L_1 ,垂直距离为 h_1 ,到右切点的水平距离为 L_2 ,垂直距离为 h_2 ,则左切点的坐标为 $(x_0 - L_1, y_0 - h_1)$,右切点的坐标为 $(x_0 + L_2, y_0 - h_2)$ 。

索鞍圆心的坐标为:

$$x_3 = x_1 + R \sin \theta_2 = x_1 + R \frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} \quad (19)$$

$$y_3 = y_1 - R \cos \theta_2 = y_1 - R \frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} \quad (20)$$

至此,索鞍的位置已完全确定。该文采用的计算方法不用解多元非线性方程组,计算简便;求解过程无需任何初值,收敛性良好。

3 单圆曲线散索鞍位置的计算

对单圆曲线散索鞍进行计算时,其锚跨侧的主缆仍可采用上述方法进行分析,但边跨侧主缆在散索鞍的理论顶点位置应是斜率最小点(主索鞍计算时理论顶点的斜率对两侧来说都是最大),同时其几何关系也会发生部分变化(图7),但总体计算思路不变。

过程如下:

令 z_3 为锚跨切点的斜率, z_4 为边跨切点的斜率。 θ_1 为索鞍圆心到锚跨切点的连线与过圆心的铅垂线的夹角, θ_2 为索鞍圆心到边跨切点的连线与过圆心的铅垂线的夹角。

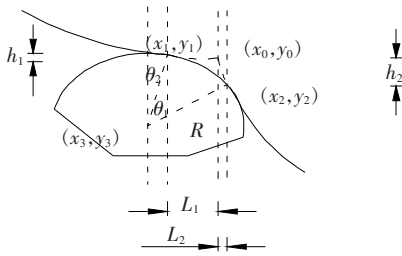


图 7 单圆曲线散索鞍局部受力示意图

仍有:

$$\tan\theta_1 = z_3, \tan\theta_2 = z_4 \quad (21)$$

左、右切点离理论顶点水平向的距离和应等于两点分别到过圆心的铅垂线的水平距离的差,即:

$$L_1 + L_2 = R \sin\theta_1 - R \sin\theta_2 \quad (22)$$

将式(21)代入得:

$$L_1 + L_2 = R \left(\frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} - \frac{z_4}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (23)$$

将 z_3 代入式(1)可得右切点在右边坐标系 II 下的横坐标:

$$x_2'' = \frac{H_2^2 z_3}{EAq} + \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) \quad (24)$$

则:

$$L_2 = x_0'' - x_2'' = x_0'' - \frac{H_2^2 z_3}{EAq} - \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) \quad (25)$$

将 z_4 代入式(1)可得左切点在左边坐标系 II 下的横坐标:

$$x_1' = \frac{H_1^2 z_4}{EAq} + \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) \quad (26)$$

则:

$$L_1 = x_1' - x_0' = \frac{H_1^2 z_4}{EAq} + \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) - x_0' \quad (27)$$

将式(25)、(27)代入式(23),可得:

$$\frac{H_1^2 z_4}{EAq} + \frac{H_1}{q} \ln(z_4 + \sqrt{1+z_4^2}) - x_0' + x_0'' - \frac{H_2^2 z_3}{EAq} - \frac{H_2}{q} \ln(z_3 + \sqrt{1+z_3^2}) = R \left(\frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} - \frac{z_4}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (28)$$

式(28)中仅 z_3 和 z_4 为未知数,已知 z_3 即可通过求解一元非线性方程的方法求得 z_4 。对给出的 z_3 (给出 z_3 的范围为所在索段最低点的斜率 z_2),取 z_4 的求解区间为 $[z_1, z_3]$,二分法求式(28)即可得 z_4 。

故 z_4 可以看作:

$$z_4 = f(z_3) \quad (29)$$

由几何关系可得:

$$h_1 + h_2 = R \cos\theta_2 - R \cos\theta_1 \quad (30)$$

将式(21)代入式(30)得:

$$h_1 + h_2 = R \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_4^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} \right) \quad (31)$$

将 z_3 代入式(2)可得右切点在右边坐标系 II 下的纵坐标:

$$y_2'' = \frac{H_2^2 z_3^2}{2EAq} + \frac{H_2}{q} \sqrt{1+z_3^2} - \frac{H_2}{q} \quad (32)$$

理论顶点和右切点的高差:

$$h_2 = y_0'' - y_2'' \quad (33)$$

将 z_4 代入式(2)可得左切点在左边坐标系 II 下的纵坐标:

$$y_1' = \frac{H_1^2 z_4^2}{2EAq} + \frac{H_1}{q} \sqrt{1+z_4^2} - \frac{H_1}{q} \quad (34)$$

理论顶点和左切点的高差:

$$h_1 = y_1' - y_0' \quad (35)$$

将式(33)、(35)代入式(31)可得:

$$\frac{H_1^2 z_4^2}{2EAq} + \frac{H_1}{q} \sqrt{1+z_4^2} - \frac{H_1}{q} - y_0' + y_0'' - \frac{H_2^2 z_3^2}{2EAq} - \frac{H_2}{q} \sqrt{1+z_3^2} + \frac{H_2}{q} = R \left(\frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+z_4^2}} \right) \quad (36)$$

式(36)中 z_4 可以用 z_3 来表示[见式(29)],其余参数均为常数,故式(36)可看为关于 z_3 的一元非线性方程。采用二分法求解式(36)时, z_4 的求解范围可取为所在索段最低点的斜率 z_2 。

上述方法在最后一轮的迭代过程中还求出了理论顶点到左切点的水平距离为 L_1 ,垂直距离为 h_1 ,到右切点的水平距离为 L_2 ,垂直距离为 h_2 ,则左切点的坐标为 $(x_0 - L_1, y_0 + h_1)$,右切点的坐标为 $(x_0 + L_2, y_0 - h_2)$ 。

索鞍圆心的坐标为:

$$x_3 = x_1 - R \sin\theta_2 = x_1 - R \frac{z_3}{\sqrt{1+z_3^2}} \quad (37)$$

$$y_3 = y_1 - R \cos\theta_2 = y_1 - R \frac{1}{\sqrt{1+z_3^2}} \quad (38)$$

如此散索鞍的鞍座位置即已求出,其计算方法与主索鞍的计算过程基本相同,但各要素的几何关系和边跨切点斜率的求法需进行相应调整。

4 算例

为验证该方法的正确性,编制程序对文献[5]的

算例进行验证计算。

算例 1:某悬索桥一个主索鞍的理论顶点(IP 点)坐标为(230 m,131.425 m),主缆横截面面积 $A_1=A_2=0.408\ 973\ \text{m}^2$,主缆自重集度 $q_1=q_2=33\ \text{kN/m}$,弹性模量 $E=198\ 000\ \text{MPa}$ 。在成桥状态线形计算中已计算出索鞍左、右两边主缆索力的水平分力 $H_1=H_2=189\ 500\ \text{kN}$, $V_1=90\ 622.7\ \text{kN}$, $V_2=73\ 504.1\ \text{kN}$ 。索鞍半径为 6.0 m。

首先将算例给出的条件转换为该文方法的已知条件。由 $z=\frac{V}{H}$ 得, $z_1=0.478\ 22$, $z_2=0.387\ 88$ 。将 H 和 z 分别代入式(3)、(4)可得理论顶点在左边坐标系Ⅱ下的坐标为(2 657.398 82 m,624.388 06 m),在右边坐标系Ⅱ下的坐标为(2 180.230 01 m,417.866 95 m)。

采用该文的方法计算出索鞍位置并同文献[5]的比较如表 1。

表 1 算例 1 的索鞍位置计算结果

计算方法	左切点 坐标/m	右切点 坐标/m	索鞍位置 (圆心坐标)/m
该文方法	(227.661 96, 130.307 43)	(232.416 14, 130.488 37)	(230.248 53, 124.893 59)
文献[5] 方法	(227.661 96, 130.307 43)	(232.416 14, 130.488 37)	(230.248 53, 124.893 59)

算例 2:某悬索桥一个散索鞍的理论顶点坐标为(0 m,54 m),主缆横截面面积 $A_1=A_2=0.408\ 973\ \text{m}^2$,主缆自重集度 $q_1=q_2=33\ \text{kN/m}$,弹性模量 $E=198\ 000\ \text{MPa}$ 。在成桥理论线形计算已计算出索鞍左、右两边主缆索力的水平分力 $H_1=H_2=189\ 500\ \text{kN}$, $V_1=137\ 557\ \text{kN}$, $V_2=-41\ 804.3\ \text{kN}$ 。索鞍半径为 6.0 m。

首先将算例给出的条件转换为该文方法的已知条件。由 $z=\frac{V}{H}$ 得, $z_3=0.725\ 89$ (锚跨), $z_4=0.220\ 60$ (边跨)。将 H 和 z 分别代入式(1)、(2)可得理论顶点在锚跨侧坐标系Ⅱ下的坐标为(3 878.719 43 m,1 356.956 156 m),在边跨侧坐标系Ⅱ下的坐标为(1 259.705 27 m,138.396 84 m)。

采用该文的方法计算出索鞍位置并同文献[5]的比较如表 2 所示。

通过表 1、2 的验证结果可以看出:该文提出的索鞍位置计算新方法的精度良好,且计算简单,整个计算过程无需任何初值,均能保证求解收敛。

表 2 算例 2 的索鞍位置计算结果

计算方法	左切点坐 标/m	右切点坐 标/m	索鞍位置(圆 心坐标)/m
该文方法	(-1.240 72, 52.753 40)	(1.717 22, 54.379 09)	(3.011 48, 48.520 34)
文献[5] 方法	(-1.240 72, 52.753 40)	(1.717 22, 54.379 09)	(3.011 48, 48.520 34)

5 结论

(1) 该文对悬索桥成桥状态下索鞍的位置计算提出了改进方法。方法以索鞍和主缆的几何相容条件建立方程,求出了主缆与索鞍切点的位置和斜率,同时得到了索鞍圆心的坐标,即索鞍的设计位置。

(2) 该文方法计算鞍座设计位置的过程仅需采用二分法求解一元非线性方程,计算简单、精度良好,无需任何初值,均能保证求解收敛。

(3) 算例表明该文计算索鞍位置方法正确。

参考文献:

[1] 王路,沈锐利,王昌将,等.悬索桥主缆与索鞍间侧向力理论计算方法与公式研究[J].土木工程学报,2017,50(12):87—96.

[2] 万田保.悬索桥主鞍座的几何位移特征及与总体布置的关系[J].桥梁建设,2003,33(3):28—31.

[3] 孙晋莉.松雅湖自锚式悬索桥成桥线形计算及施工控制分析[D].长沙:中南大学,2011.

[4] 唐茂林.大跨度悬索桥空间几何非线性分析与软件开发[D].成都:西南交通大学,2003.

[5] 唐茂林,沈锐利,强士中.悬索桥索鞍位置设计[J].公路交通科技,2001,18(8):55—58.

[6] 李传习.现代悬索桥静力非线性理论与实践[M].北京:人民交通出版社,2014.

[7] 杨勇.非对称悬索桥主缆线形程序开发与参数分析[D].重庆:重庆交通大学,2010.

[8] 邓小康,徐恭义.一种悬索桥主缆计算的新方法[J].铁道学报,2019,41(5):133—141.

[9] 唐茂林,强士中,沈锐利.悬索桥成桥主缆线形计算的分段悬链线法[J].铁道学报,2003,25(1):87—91.

[10] 吴章旭.空间索面悬索桥主缆线形的主索鞍影响分析与程序开发[D].重庆:重庆交通大学,2017.

[11] 李传习,王雷,刘光栋,等.悬索桥索鞍位置的分离算法[J].中国公路学报,2005,18(1):63—67.