

存在扰动、信息不确定的复杂控制系统。许多学者已将卡尔曼滤波法<sup>[2]</sup>、神经网络法<sup>[3]</sup>和灰色模型预测法<sup>[4]</sup>引入桥梁施工控制和健康监测。但基于大数据的卡尔曼滤波法、神经网络法在节段数量有限的悬臂桥梁施工监控中很难得到较好的标高预测精度。近年来,以“小数据”、“贫信息”、不确定性系统为研究对象的灰色模型预测技术在大跨度桥梁施工监控方面应用较广泛,并取得了许多成果。张永水等<sup>[5]</sup>将 GM(1,1) 灰色模型引入重庆黄花园嘉陵江大桥施工监控,证明了灰色理论的适用性;孙永明等<sup>[6]</sup>进一步对 GM(1,1) 模型进行优化,建立了一套大跨度连续梁自适应施工控制系统。为了增强可操作性和提高预测精度,包仪军<sup>[7]</sup>、包龙生<sup>[8]</sup>针对 GM(1,1) 灰色模型的背景值、初始值及数据序列生成方法进行了改进优化,并成功运用于桥梁施工节段高程预测。

不仅如此,姚荣<sup>[9]</sup>、彭梦鸽<sup>[10]</sup>均通过工程实例将 GM(2,1) 与 GM(1,1) 的预测精度做了对比分析,前者认为 GM(2,1) 预测更有效,后者得出相反结论,充分说明了阶数的选取是提高预测精度的关键;孟伟<sup>[11]</sup>、Wu L<sup>[12]</sup>、Fang S L<sup>[13]</sup>将灰色模型的阶数由整数拓展到分数,从而建立了分数阶拓展算子的灰色预测模型,研究表明:分数阶不仅能实现对模型阶数的精确调整,而且能提高对拟合线形变化速率的控制效果;吴利丰等<sup>[14]</sup>、刘解放等<sup>[15]</sup>充分验证了分数阶灰色预测模型的稳定性,也证明了其具有更强的普遍适用性。该文尝试将分数阶算子灰色模型应用于连续刚构桥梁施工线形控制,并对模型背景值进行修正,从而得到优化的分数阶算子灰色预测模型,并且通过工程实例验证其可行性,探讨最优阶数的选取,对比分析新模型的预测精度。

## 2 优化的分数阶算子灰色预测模型

### 2.1 分数阶算子的 GM(1,1) 模型

设  $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$  为原始序列,  $r \in R^+$ ,  $X^{(r)} = (x^{(r)}(1), x^{(r)}(2), \dots, x^{(r)}(n))$  为  $X^{(0)}$  的  $r$  阶累加生成算子,记为  $r$ -AGO。则:

$$x^{(r-1)}(k) + az^{(r)}(k) = b \quad (1)$$

称为基于分数阶算子的 GM(1,1) 模型。

特别当  $r = 1$  时,  $X^{(r)} = X^{(1)}$ , 即为一次累加生成算子,  $x^{(r-1)}(k) + az^{(r)}(k) = b$  变为  $x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b$ , 即为传统的 GM(1,1) 模型。

$$\text{式中: } x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} x^{(0)}(i), k=1, 2, \dots, n; \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt, Z^{(r)} = (z^{(r)}(2), z^{(r)}(3), \dots, z^{(r)}(n))。$$

背景值参数  $z^{(r)}(k)$  的构造方式为:

$$z^{(r)}(k) = \frac{x^{(r)}(k) + x^{(r)}(k-1)}{2}, k=2, 3, \dots, n \quad (2)$$

参数向量  $\hat{a} = [a, b]^T$  运用最小二乘法估计得,  $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ , 其中,  $Y$ 、 $B$  分别为:

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(r-1)}(2) \\ x^{(r-1)}(3) \\ \vdots \\ x^{(r-1)}(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -z^{(r)}(2) & 1 \\ -z^{(r)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(r)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

关于最优阶数  $r$  的选取,采用原始序列与预测序列的最小均方误差为指标进行确定,具体形式为:

$$\min f(r) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n [x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)]^2, r \in R^+ \quad (4)$$

最优的分数阶阶数  $r$  的计算采用自适应变异粒子优化算法<sup>[16-17]</sup>(简称 PSO)。该算法计算简洁,便于实现,主要步骤为:

(1) 设置粒子群中粒子的初始值  $rBest$ , 取  $r = 1$ , 即为均值 GM(1,1) 模型;取  $rBest = r$ , 计算灰色模型的最小均方误差  $f(rBest)$ 。

(2) 判断  $|f(rBest) - A|$  是否小于给定的收敛值  $\delta$ , 其中  $A$  为粒子在最佳位置的最小均方误差。

(3) 若收敛,进行步骤(4);若不收敛,重新假定分数阶阶数  $r$ , 不断更新粒子群粒子位置,并转向步骤(2)。

(4) 输出收敛准则下的  $r$  值,即为分数阶灰色模型的最优阶数。计算预测值  $\hat{x}^{(0)}(k)$ , 并进行模型精度检验,算法结束。

### 2.2 含三参数的分数阶 GM(1,1) 模型

实际上,式(2)是根据牛顿-柯特斯(Newton-Cotes)求积公式得到的梯形积分数值解。该公式只有 1 次代数精度,且没有考虑到其他参数对模型精度的影响。若涉及参数过多不仅会增加计算难度,而且会造成对原始数据的过度拟合致使模拟线形失真。针对此问题,将文献<sup>[18]</sup>中的三参数背景值构造方法与分数阶拓展算子的 GM(1,1) 模型相融合,形成一种新的

含三参数的分数阶GM(1,1)模型,具体形式如下:

$$x^{(r-1)}(k) + az^{(r)}(k) = kb + c \quad (5)$$

$$z^{(r)}(k) = \frac{x^{(r)}(k) + x^{(r)}(k-1) + x^{(r)}(k-2)}{3},$$

$$k=3,4,\dots,n; Z^{(r)} = [z^{(r)}(3), z^{(r)}(4), \dots, z^{(r)}(n)]$$

参数向量  $\hat{b} = [a, b, c]^T$  运用最小二乘法估计得,

$\hat{b} = (N^T N)^{-1} N^T M$ , 其中,  $M, N$  分别为:

$$M = \begin{bmatrix} x^{(r-1)}(3) \\ x^{(r-1)}(4) \\ \vdots \\ x^{(r-1)}(n) \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}[x^{(r)}(3) + x^{(r)}(2) + x^{(r)}(1)] & 3 & 1 \\ -\frac{1}{3}[x^{(r)}(3) + x^{(r)}(2) + x^{(r)}(1)] & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{3}[x^{(r)}(n) + x^{(r)}(n-1) + x^{(r)}(n-2)] & n & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

### 2.3 模型精度检验指标

根据灰色理论,灰色预测模型需要通过相关的精度检验指标进行检验后才能用于预测<sup>[19]</sup>。为了检验该文新模型的预测性能,采用以下3个指标进行精度评定,计算方法为:

(1) 残差指标:

$$\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k) \quad (7)$$

(2) 相对误差指标:

$$\Delta_k = \frac{|\varepsilon(k)|}{x^{(0)}(k)} \quad (8)$$

(3) 平均相对误差指标:

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n \Delta_k \quad (9)$$

## 3 监控实例

### 3.1 工程概况

重庆石柱至黔江高速公路的里头河大桥为(70+130+70)m三向预应力混凝土变截面连续刚构桥,采用悬臂浇筑法施工,桥型布置如图1所示。桥梁节段划分为:0#块长14m,1#~16#梁段长度组合为4×3.0m+6×3.5m+6×4.0m,边、中跨合龙段长度均为2.0m,边跨现浇段长为3.9m。0#梁段采用托架现浇施工,其余梁段用挂篮分段对称悬臂浇筑。

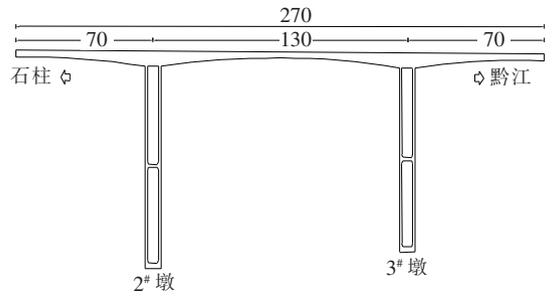


图1 桥型布置图(单位:m)

### 3.2 线形监测结果

为了保障桥梁顺利合龙以及成桥后桥面线形良好,需通过监控计算和现场监测手段对主梁施工过程中的节段高程变化状态进行有效计算、监测、分析和预测。首先,利用Midas/Civil软件建立有限元模型对施工过程进行模拟计算,得到理论预拱度,从而获取每个施工节段的理论高程值;其次,每个节段施工时,在距离施工节段前10cm布置测试截面,每个截面布置5个高程监测点(采用钢筋头制作,外露长度5cm)用于测试实际节段高程,如图2所示。采用高精度电子水准仪按照二等水准要求进行测量;最后,通过对已浇筑节段高程的理论值、实测值进行对比分析,寻找偏差原因,从而调整参数,预测下一节段的实际高程。

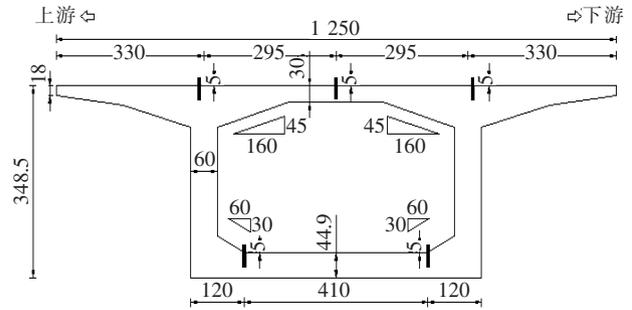


图2 标高测点布置图(单位:cm)

限于篇幅,表1中列出了部分节段(2#墩沿中跨方向)的桥梁中心线上的监测点在预应力张拉后的节段高程监测数据。不难看出:各节段高程实测值与理论值之间存在偏差。而有限元模型计算参数取值误差、测量误差以及现场施工环境多变等原因导致了节段高程理论值与实测值存在偏差。在后续节段浇筑中,传统的有限元计算自适应控制方法是通过标高实测值反馈调节模型相关材料参数从而实现对模型的修正,并将修正后的新理论值用于作为节段立模标高使用。但采用这种方法进行施工控制仍有误差累积的趋势。

表 1 部分节段高程监测数据

节段号	理论值/ m	实测值/ m	(实测-理 论)/mm	实测/理论
3 <sup>#</sup>	21.124 9	20.128 6	3.7	1.15
4 <sup>#</sup>	21.133 1	21.137 4	4.3	1.21
5 <sup>#</sup>	21.143 3	21.150 1	6.8	1.16
6 <sup>#</sup>	21.154 6	21.166 9	12.3	1.22
7 <sup>#</sup>	21.166 6	21.183 4	16.8	1.26
8 <sup>#</sup>	21.179 1	21.200 8	21.7	1.27
9 <sup>#</sup>	21.191 1	21.214 6	23.5	1.25

注:表中高程值均为相对高程。

## 4 模型应用及对比分析

为了说明含三参数分数阶 GM(1,1)模型的可行性和精确性,以表 1 中部分节段的高程监测数据为原始样本数据,首先对后续未浇筑节段的高程进行预测,并与实测值进行比较以验证模型的可行性。接着,将新模型与传统 GM(1,1)模型、分数阶 GM(1,1)进行精度对比分析。

### 4.1 含三参数的分数阶 GM(1,1)模型应用

设各节段高程理论值序列为:

$$Y = (Y(1), Y(2), \dots, Y(n))$$

对应的节段高程实测序列为:

$$Y' = (Y'(1), Y'(2), \dots, Y'(n))$$

首先,以 4<sup>#</sup>~9<sup>#</sup>节段预应力张拉完成后预拱度理论值与实测值的差值为模型原始序列(实测值与模拟值对比见图 3),有:

$$X^{(0)} = (4.3, 6.8, 12.3, 16.8, 21.7, 23.5)$$

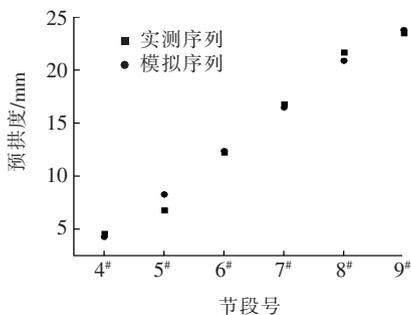


图 3 实测值与模拟值对比

用 Matlab 软件进行仿真计算,以最小均方误差为指标,初始化粒子个数为 100,最大迭代次数为 200,学习因子  $c_1$  和  $c_2$  均设置为 1.5,惯性权重设置为 0.8,通过 PSO 算法搜索得到最优的阶数为  $r=0.32$ ,则:

$$X^{(0.32)} = (4.3, 8.2, 15.5, 23.2, 31.8, 38.1)$$

故背景值序列为:

$$Z^{(0.32)} = [9.3519, 15.6366, 23.5015, 31.0304]$$

其次,根据式(6)得参数  $M$ 、 $N$  和向量  $\hat{b} = [a, b, c]^T$  为:

$$M = \begin{bmatrix} 7.2889 \\ 7.6321 \\ 8.6737 \\ 6.2808 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -9.3519 & 3 & 1 \\ -15.6366 & 4 & 1 \\ -23.5015 & 5 & 1 \\ -31.0304 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = (0.7976, 5.6160, -1.9475)$$

最后,经过累减生成序列的模拟值为:

$$\hat{X}^{(0)} = (4.3, 8.3, 12.4, 16.5, 20.9, 23.8)$$

由计算结果和图 3 可以得知:实测值与模拟值较为接近,特别是在 7<sup>#</sup>~9<sup>#</sup>节段,验证了灰色理论模型“新陈代谢”的优点,即利用新的数据序列反映其变化趋势,能避免误差积累。另外,实测值与模拟值差值在 5 mm 以内,最大误差为 1.5 mm,线性吻合度较好。在此基础之上,将该模型用于 10<sup>#</sup>节段的节段高程差值的预测,经计算得  $\hat{x}^{(0)}(7) = 27.9$  mm,而实测值为 27.2 mm,差值为 0.7 mm,说明该模型用于节段高程预测是可行有效的。

### 4.2 预测精度对比分析

为了验证该文模型在连续刚构桥梁节段高程预测中的精确性,将 GM(1,1)模型、分数阶 GM(1,1)模型以及该文模型分别用于 10<sup>#</sup>~15<sup>#</sup>节段的高程预测,并用误差检验的残差  $\varepsilon(k)$ 、相对误差  $\Delta(k)$  以及平均相对误差  $\Delta$  3 个指标进行精度评定,结果比较见表 2。

由预测结果可见:分数阶模型处理后的各个预测值的残差、相对误差均有所减小。更重要的是,分数阶 GM(1,1)模型的预测平均相对误差为 9.0%,相比传统的 GM(1,1)模型减少了 8.5%,预测精度得到进一步提高,说明对于阶数的优化可以改善预测效果,分数阶 GM(1,1)模型能够较好地用于大跨度悬臂桥梁施工节段高程预测。另外,在分数阶模型处理中,优化的分数阶 GM(1,1)模型将背景值参数由传统的 2 个拓展至 3 个,增强了原始序列的平滑效果,弱化了极端值的影响,使平均相对误差减小到了 5.9%,进一步提高了预测精度。

## 5 结论

桥梁工程施工监控是个受多因素、多维度影响的

表2 不同灰色模型预测精度比较

节段号	$x^{(0)}(k)$	GM(1,1)模型				分数阶GM(1,1)模型				优化的分数阶GM(1,1)模型			
		$\hat{x}^{(0)}(k)$	$\epsilon(k)$	$\Delta_k/\%$	$\Delta/\%$	$\hat{x}^{(0)}(k)$	$\epsilon(k)$	$\Delta_k/\%$	$\Delta/\%$	$\hat{x}^{(0)}(k)$	$\epsilon(k)$	$\Delta_k/\%$	$\Delta/\%$
10#	27.2	27.9	-0.7	2.6		29.6	-2.4	8.8		27.9	-0.7	2.6	
11#	31.5	33.2	-1.7	5.4	17.5	33.1	-1.6	5.1	9.0	33.3	-1.8	5.7	5.9
12#	36.9	47.0	-10.1	27.4		31.0	5.9	16.0		39.7	-2.8	7.6	
13#	41.5	55.9	-14.4	34.7		44.0	-2.5	6.0		44.7	-3.2	7.7	

复杂灰色系统,灰色预测理论是连续刚构桥梁高程预测的重要方法。该文将分数阶算子GM(1,1)模型引入大跨度桥梁高程预测,并建立了一种含三参数的分数阶GM(1,1)新模型,实现了对传统GM(1,1)模型的阶数和背景值的双重优化。得出以下结论:

(1) 将背景值参数由传统的2个拓展至3个,增强了原始序列的平滑效果,弱化了极端值对灰色预测模型精度的影响。

(2) 将传统的GM(1,1)的阶数由整数拓展到分数,可以提高模型的预测精度。

(3) 利用PSO算法自动搜寻阶数,不仅可以快速高效地找到最优阶数,而且实现的是全局最优,从而提高了精度。

(4) 结合里头河大桥施工监控,对该文模型进行了验证、对比分析。结果表明该模型切实可行,且精度较高,对于同类型的桥梁施工控制有一定的参考价值。

#### 参考文献:

[1] 孙国樑,杨昀. 杭州下沙大桥主桥施工监控技术[J]. 公路交通科技,2002,19(2):84-86.

[2] 花迎春,张劲泉. 卡尔曼滤波法应用于悬索桥施工控制[J]. 公路交通科技,1999,16(2):35-38.

[3] 陈建阳,向木生,郭峰祥,等. 大跨度桥梁施工控制中的神经网络方法[J]. 桥梁建设,2001,31(6):42-45,57.

[4] 肖长礼. 水磨湾特大桥连续刚构施工监控[J]. 公路交通科技(应用技术版),2006,2(3):125-127.

[5] 张永水,顾安邦. 灰色系统理论在连续刚构桥施工控制中的应用[J]. 公路,2001,46(6):42-45.

[6] 孙永明,荣学亮,何晓东. 混凝土连续梁桥悬浇施工控制方法研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版),2015,34(4):28-33.

[7] 包仪军,王常峰,赵继康. 基于改进灰色预测GM(1,1)模型的大跨度桥梁施工控制[J]. 铁道建筑,2016,55(2):18-22.

[8] 包龙生,周子博,于玲. 基于累积法的GM(1,1)模型在桥梁施工监控上的应用[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版),2018,34(2):239-246.

[9] 姚荣. 桥梁施工监控技术中的灰色系统预测模型对比分析[J]. 中外公路,2011,31(5):160-163.

[10] 彭梦鸽. 基于灰色理论的悬浇连续梁施工挠度分析与预测[J]. 中外公路,2018,38(6):131-135.

[11] 孟伟. 基于分数阶拓展算子的灰色预测模型[D]. 南京:南京航空航天大学,2015.

[12] WU L, LIU S, CHEN D, et al. Using Gray Model with Fractional Order Accumulation to Predict Gas Emission [J]. Natural Hazards, 2014, 71(3): 2 231-2 236.

[13] FANG S L, WU L F, FANG Z G, et al. Using Fractional GM(1,1) Model to Predict the Maintenance Cost of Weapon System [J]. Journal of Grey System, 2013, 25(3):9-15.

[14] 吴利丰,刘思峰,刘健. 灰色GM(1,1)分数阶累积模型及其稳定性[J]. 控制与决策,2014,29(5):919-924.

[15] 刘解放,刘思峰,吴利丰,等. 分数阶反向累加离散灰色模型及其应用研究[J]. 系统工程与电子技术,2016,38(3):719-724.

[16] 倪庆剑,邢汉承,张志政,等. 粒子群优化算法研究进展[J]. 模式识别与人工智能,2007,20(3):349-357.

[17] 李军亮,肖新平. 基于粒子群算法的GM(1,1)幂模型及应用[J]. 计算机工程与应用,2008,44(32):15-18.

[18] 杨孝良,周猛,曾波. 灰色预测模型背景值构造的新方法[J]. 统计与决策,2018,34(19):14-17.

[19] 党耀国,王正新,刘思峰. 灰色模型的病态问题研究[J]. 系统工程理论与实践,2008,28(1):156-160.