

## 大跨径柔性拱钢—混组合梁天桥人行致振舒适度研究

李东洋<sup>1,2</sup>, 李栋<sup>1</sup>, 郭馨艳<sup>2\*</sup>, 何帆<sup>1</sup>, 黄政<sup>1</sup>,郭继业<sup>1</sup>, 汪旭<sup>1</sup>, 迟航<sup>1</sup>

(1. 珠海市规划设计研究院, 广东 珠海 519000; 2. 华南理工大学 土木与交通学院, 广东 广州 510640)

**摘要:**该文以一座大跨径柔性拱钢—混组合梁人行天桥为例,介绍天桥人行致振舒适度验算方法,通过 Midas/Civil 软件建立有限元模型分析天桥的动力特性,采用时程分析方法考察 4 种规范规定的人群荷载模型下天桥的动力响应,研究行走频率和人群密度的关系、阻尼比、支座设置形式对结构动力响应的影响,最终基于不同规范规定的舒适度评价标准对该人行天桥舒适度进行验算和综合评估,研究结果表明该人行天桥的舒适度满足各规范的验算要求。

**关键词:**大跨径; 钢—混组合梁; 人行天桥; 舒适度

**中图分类号:** U448.34

**文献标志码:** A

随着城市化进展不断推进,兼具跨越和景观功能的人行天桥数量逐年攀升。尤其对于跨度大、结构异形、材料高强轻质的新型人行桥,人行致振引发的舒适度问题备受关注<sup>[1-2]</sup>。最典型的案例是 2000 年英国千禧桥仅开放通行 3 天即因行人通过时引起振动过大而关停改造。据新闻报道,2014—2019 年,福州、西安、成都、十堰、绵阳、昆明等地新建或原有人行天桥存在不同程度的人感振动行走不舒适的情况。尽管舒适度对个人而言是主观的感受,但对特定的人群舒适度是可以进行量化的指标<sup>[3]</sup>。各国规范关于人行桥舒适度的规定不尽相同,但大体上是以固有频率和加速度作为评价标准。中国沿用二十多年的 CJJ 69—95《城市人行天桥与人行地道技术规范》<sup>[4]</sup>针对舒适度仅对上部结构的竖向固有频率作出规定( $\geq 3$  Hz),最新的 CJJ 69—201x《城市人行天桥与人行地道技术规范》征求意见稿(以下简称中国规范)<sup>[5]</sup>则考虑了固有频率、阻尼比、加速度等因素对舒适度的影响,对舒适度影响因素考虑更加全面。

综上所述,伴随着新材料、新结构在人行天桥建设中的不断应用,舒适度研究从单一因素影响逐渐往多因素影响、多层次评价标准方面发展。该文以广东省珠海市拱北口岸前繁华路段某大跨度柔性拱支撑的钢—混凝土组合梁结构人行天桥为例,通过有限元方法对天桥进行动力特性分析,依据不同国家规范对舒

适度进行综合评价;考虑不同步行荷载模型、行走频率、阻尼比和支座设置形式等因素对人行天桥舒适度的影响。

## 1 工程实例

该人行天桥位于珠海市拱北口岸前迎宾南路与粤华路路口,周边人流量较大,目前仅有一座单面人行天桥。在该路口保留现状天桥主体结构基础上,增设跨越迎宾南路段天桥(呈近 $\infty$ 形),与现状天桥通过外部装饰合并形成整体(整体呈近 $\infty$ 形),如图 1 所示。



图 1 人行天桥效果图

该天桥新建主梁采用钢混组合梁,为墩梁固结体系,跨径组合为 $(5.113+40.889+49.45+2.85)$  m = 98.302 m,桥梁平面和立面如图 2、3 所示。组合梁标准段总高度为 1.5 m,西侧过渡段与现状天桥主梁进行衔接,总高度 1.1~1.5 m。中间主墩两侧各 25.313

收稿日期:2020—08—03

基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号:11872185),珠海市社会发展领域科技计划项目(编号:ZH22036205200004PWC)

作者简介:李东洋,男,博士,工程师。E-mail:lidongyang002@qq.com

\* 通信作者:郭馨艳,女,博士,副教授。E-mail:xyguo@scut.edu.cn

m 范围桥面宽度为 6~11.625 m,其余桥面为 4.5 m 等宽,在单箱三室和单箱单室钢箱梁上浇筑 C50 钢纤维无收缩混凝土。主桥桥墩墩身为圆角矩形柱式墩,呈花瓶形状,墩顶与主梁通过螺栓进行固结。桥墩下部均采用承台接钻孔灌注桩的基础形式。

主梁上方设置提篮拱,铅垂面内矢高 10.1 m,跨径 86.841 m,矢跨比为 1/8.6,拱圈采用外径 500 mm 壁厚 20 mm 钢管,拱角 3 m 范围灌注 C50 无收缩混凝土,两榀拱圈间设外径 300 mm、壁厚 12 mm 钢管风撑,共计 19 根,长度 7.952~11.957 m。拱圈和主梁之间采用两端带叉耳的吊杆连接,吊杆规格为 GJ15-7 钢绞线整束挤压吊杆,吊杆共计 20 套,长度为 6.292~8.621 m。主桥箱梁、提篮拱及梯道等钢构件采用 Q345C 钢材。

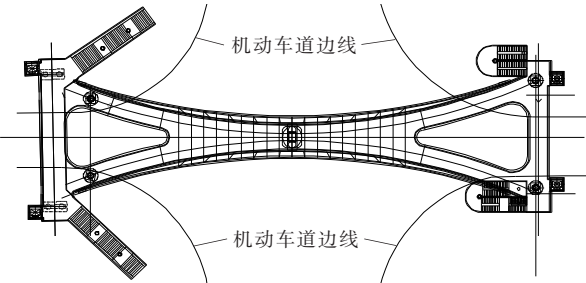


图 2 桥梁平面布置图

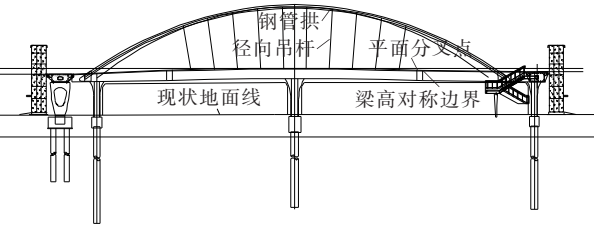


图 3 桥梁立面图

## 2 有限元动力特性分析

### 2.1 有限元模型的建立

采用 Midas/Civil 2019 有限元分析软件建立人行天桥的三维杆系模型,考察天桥在人行荷载作用下的动力特性,有限元模型如图 4 所示。主梁、提篮拱、下部墩柱、桩基均采用梁单元模拟,吊杆采用桁架单元模拟,全桥模型共有单元 411 个。天桥自重由软件自动计算;二期荷载包括桥面铺装与护栏,按均布荷载加载到梁单元上。

### 2.2 自振模态分析

选择多重 Rits 向量法进行自振模态分析,自振频

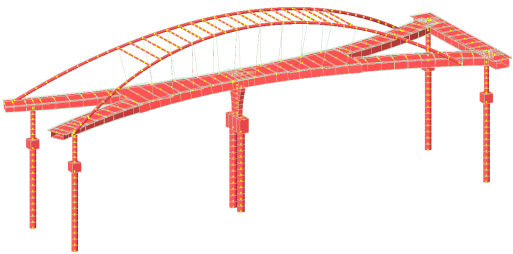


图 4 桥梁有限元模型

率、周期和振型特点如表 1 所示,该文明列出自振频率小于 3 Hz 的前 8 阶模态。天桥的振动形式主要是柔性拱的侧向弯曲和主梁的竖向弯曲,大跨度柔性拱及吊杆刚度较小,导致 1 阶模态的侧向固有频率比较小,小于 1.2 Hz,而且竖向固有频率也小于规范规定的 3 Hz,因此应进行人致振动舒适度验算。由表 1 可知:在前 8 阶模态中仅第 1 阶模态侧向固有频率低于中国规范规定值( $<1.2$  Hz),模态 2、4、7 竖向固有频率均小于规定值( $<3$  Hz),因此该文主要关注该人行天桥的竖向振动和舒适度。

表 1 桥梁自振特性

模态号	自振频率/Hz	自振周期/s	振型特点
1	1.062	0.942	柔性拱反对称侧向弯曲
2	1.453	0.688	主梁反对称竖向弯曲
3	1.546	0.647	柔性拱反对称侧向弯曲
4	1.571	0.637	主梁反对称竖向弯曲
5	1.953	0.512	柔性拱对称侧向弯曲
6	2.112	0.473	柔性拱对称侧向弯曲
7	2.740	0.365	主梁对称竖向弯曲
8	2.930	0.341	柔性拱对称侧向弯曲

### 2.3 人行荷载模型

以最不利竖向人群荷载进行加载分析,通过时程分析方法获得加速度时程曲线,验算竖向峰值加速度。目前各国规范给出的人群荷载模型不尽相同,中国在近年公布的人行天桥规范征求意见稿中才给出推荐的人行荷载模型。为全面研究人群荷载模型对舒适度的影响,该文以 4 类不同的人群荷载模型作为荷载激励分析人行天桥的动力特性。

#### 2.3.1 中国规范和德国规范 EN 03(2007)

中国规范推荐的人群荷载模型参考了德国规范 EN 03(2007)<sup>[6]</sup>,桥面上行人密度为  $d$ ,人行荷载加载面积为  $S$ ,行人总数为  $n = Sd$ ,则全桥范围内  $n$  个行人行走引起的结构响应可以等效为由单位面积  $n'$  个

行人同步行走引起的结构响应。中国规范和德国规范规定的人群荷载均为以下简谐波荷载:

$$P_v(t) = 280 \cos(2\pi f_m t) \cdot \psi \cdot \frac{n'}{S} \quad (1)$$

式中:  $f_m$  为分析模态的频率;  $\psi$  为考虑步频接近基频变化范围临界值的概率而引进的折减系数, 中国规范和德国规范对  $\psi$  的取值有不同规定, 如图 5 所示;  $n'$  为行人流等效人数, 当行人密度  $d < 1.0$  人/ $\text{m}^2$  时,  $n' = 10.8\sqrt{\zeta \cdot n}$ ; 行人密度  $d \geq 1.0$  人/ $\text{m}^2$  时,  $n' = 1.85\sqrt{n}$ ;  $S$  为加载面积;  $\zeta$  为结构的阻尼比。

中国规范和德国规范的人群荷载是以均布等效荷载的形式按跨均布施加在桥面上。

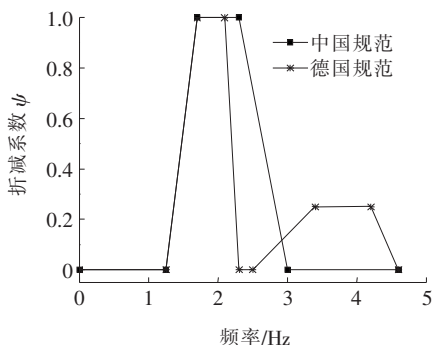


图 5 中国规范和德国规范的折减系数

### 2.3.2 国际标准化组织(ISO 10137—2007)

对于人群在天桥上行走引起的动力响应, 国际标准化组织(ISO 10137—2007)<sup>[7]</sup>通过单人荷载函数乘以等效人数  $N_p$  来反映, 其取值与人群密度有关。

规范建议的单人荷载模型是以傅里叶级数的简谐波函数来表达:

$$F_y(t) = P \left[ 1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sin(2\pi i f_s t + \varphi_i) \right] \quad (2)$$

$$\alpha_1 = 0.4 + 0.25(f_s - 2), \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$$

式中:  $P$  为行人体重, 依据《中国居民营养与慢性病状况报告》<sup>[8]</sup>, 中国人均体重为  $P = 650$  N;  $\alpha_i$  为第  $i$  阶简谐波分量的动载因子;  $f_s$  为步行频率;  $t$  为步行时间;  $\varphi_i$  为第  $i$  阶简谐波分量的相位角, 取  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ 。

因此人群行走等效集中荷载表示为:

$$F_y(t)_{\text{等效}} = N_p \cdot P \left[ 1 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i \sin(2\pi i f_s t + \varphi_i) \right] \quad (3)$$

当行人互不干扰, 人群密度  $d < 0.5$  人/ $\text{m}^2$  时, 取  $N_p = \sqrt{n}$ ; 当行人步频同步, 人群密度  $d > 1.0$  人/ $\text{m}^2$  时, 取  $N_p = 1.85\sqrt{n}$ ; 当行人步频锁定, 人群密度  $d >$

1.5 人/ $\text{m}^2$  时, 取为  $N_p = 0.2n$ 。其中  $d$  为人群密度;  $n$  为行人总数。

基于国际标准化组织(ISO 10137—2007)单人荷载等效的人群荷载以集中荷载的形式按跨施加在振型位移最大点处, 以模拟人群行走达到的最不利响应。

### 2.3.3 瑞典规范 Bro(2004)

瑞典规范 Bro(2004)<sup>[9]</sup>将人群荷载模拟表达为脉动正弦等效动力集中荷载:

$$F_b(t) = k_1 k_2 \sin(2\pi f_s t) \quad (4)$$

式中:  $k_1 = \sqrt{0.1BL}$ ,  $B$  为桥梁宽,  $L$  为跨径;  $k_2 = 150$  N, 由成年人的平均体重与所选取的谐波动载因子的乘积求得;  $f_s$  为步行频率。

基于瑞典规范 Bro(2004)的人群等效荷载以等效集中荷载的形式施加于模态振型幅值处。

## 3 结果分析

### 3.1 不同人群荷载模型下的动力响应分析

人行天桥的时程分析采用振型叠加法, 分别以中国规范、德国规范、国际标准化组织、瑞典规范规定的人群荷载函数作为时程荷载函数, 在主梁单元节点上以节点动力荷载的形式施加人群行走等效均布荷载, 分析时间步长按照 Midas/Civil 帮助文件推荐取时程函数周期或结构振动最小自振周期的  $1/10$ 。该节考虑人群密度  $d = 1.5$  人/ $\text{m}^2$  (行人密集) 的情况。为便于叙述, 将人行天桥的主梁按不同单元节点分为梁段 1~6 (图 6)。

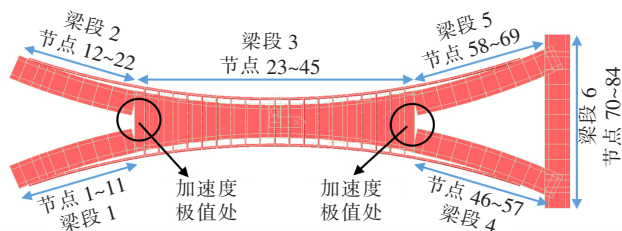


图 6 主梁分段示意图

图 7 为梁段 1~6 (节点 1~84) 基于不同规范的人群荷载作用下获得的加速度计算结果。由图 7 可以看出: 不同人群荷载下人行天桥的加速度最大值均出现在梁段 1、2、4、5 与 3 的连接处。

中国规范和德国规范都是基于相同的人群荷载计算模型, 不同的是折减系数  $\psi$  的取值, 因此基于中国规范和德国规范计算得到的加速度分布规律是相似的, 各模态下加速度最大值分布规律是: 模态 4 > 模态

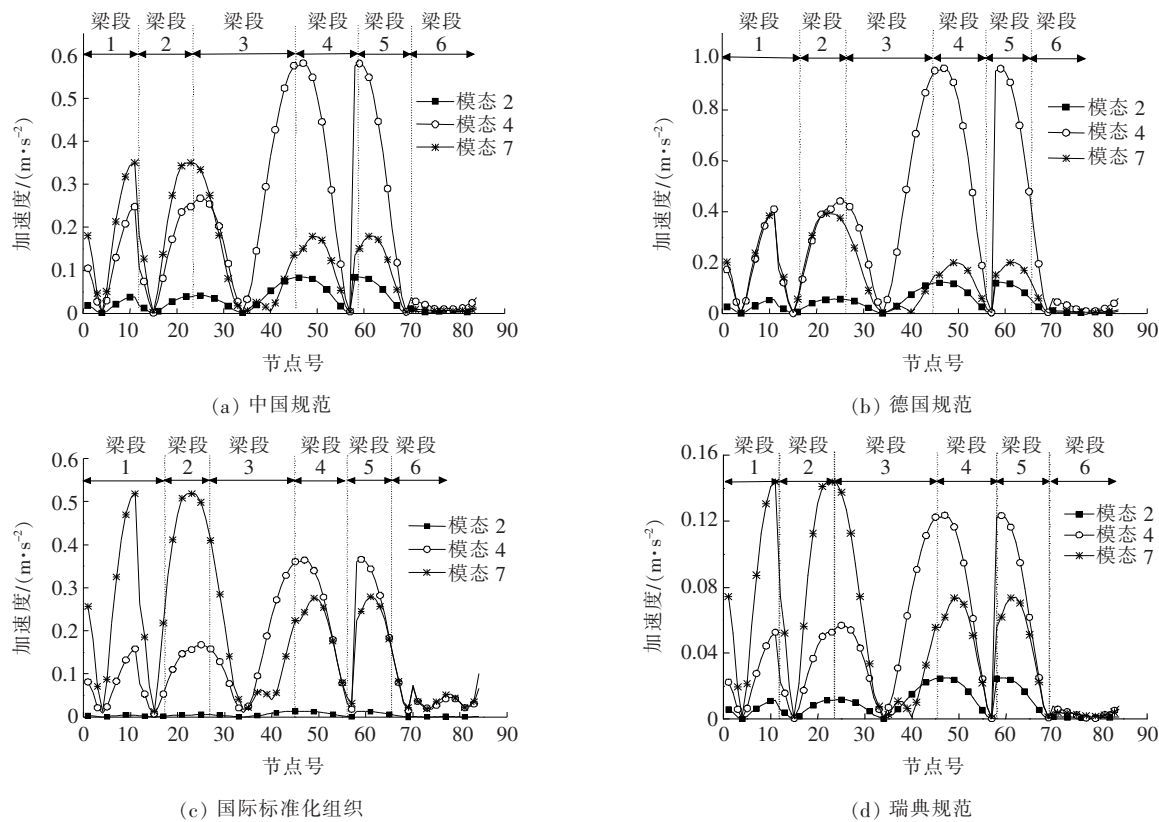


图7 基于不同规范的加速度分布图

7>模态2,加速度最大值出现在模态4时梁段4(梁段5)与梁段3的连接处。而基于国际标准化组织和瑞典规范计算出的各模态下加速度最大值分布规律是类似的:模态7>模态4>模态2。导致这种不同趋势的原因是中国规范和德国规范都规定了与步行频率相关的折减系数 $\psi$ ,当步行频率为1.25~1.7 Hz时,折减系数呈上升趋势即人群荷载随之增大;在步行频率大于2.3 Hz时折减系数呈下降趋势即人群荷载随之减小。而国际标准化组织和瑞典规范则没有类似规定。模态7的固有频率为2.7 Hz位于折减系数下降段区间,但国际标准化组织和瑞典规范没有相应折减的规定,导致不同的最大加速度分布规律。

3.2 行走频率和人群密度的影响分析

行走频率表现的是行走快慢的状态,行走频率为1.5~2 Hz时行人处于自然行走状态,2~3 Hz时处于快步行走的状态<sup>[10]</sup>。当人群密度较小( $d < 1$  人/ $\text{m}^2$ )时,行人行走可以考虑为自由不受约束,行走频率持续较高;当人群密度较大( $d \geq 1$  人/ $\text{m}^2$ )时,行人步行受阻,快步行走不能实现,此时的行走频率相应降低。行人密度 $d > 1.5$  人/ $\text{m}^2$ 时,行走进入停滞状态,因此在天桥舒适度设计计算中,确定人群密度时应结合行走频率予以考虑。综合文献[10-12],表2给

出了行走状态、行走频率与计算时考虑的最大人群密度相对合理的对应关系。

对于该文研究的人行天桥,模态2( $f = 1.453$  Hz)取最大人群密度 $d = 1.5$  人/ $\text{m}^2$ ;模态4( $f = 1.571$  Hz)取最大人群密度 $d = 1$  人/ $\text{m}^2$ ;模态7( $f = 2.74$  Hz)取最大人群密度 $d = 0.5$  人/ $\text{m}^2$ 。

表2 行走状态、行走频率和人群密度对应关系

行走状态	行走频率/Hz	最大人群密度/(人·m <sup>-2</sup> )
停滞	<1.5	1.5
自然行走	1.5~2.0	1.0
快步行走	2.0~3.0	0.5
跑步	>3.0	0.3

3.3 阻尼比影响分析

以往研究表明<sup>[13]</sup>,阻尼比的大小会影响动力特性计算,各国规范给出了不同材质的阻尼比,中国规范规定钢-混凝土的阻尼比为1%;德国规范规定最小值为0.3%,平均值为0.6%;国际标准化组织规定为0.6%。图8为阻尼比为0.3%~1.1%时不同规范计算得到的峰值加速度。由图8可知:随着阻尼比的增加,结构的峰值加速度随之减小,因此在计算中应结合



实际工程选取合理阻尼比,以减小阻尼比对计算结果的影响。该文的计算统一取阻尼比为 0.6%。

3.4 支座设置形式的影响分析

在该天桥初步设计时,墩柱与梁体的连接并非如现设计采用全桥墩梁固结的方案。现有研究指出<sup>[14]</sup>,支座形式及其刚度大小会影响桥梁振动舒适度。因此该文分别对采用不同支座形式的工况进行研究,分析支座形式的选取对人行致振舒适度的影响:① 工况 1 为全部墩柱固结,即不设支座;② 工况 2 为中墩墩梁固结,一侧边墩固结,一侧边墩设置板式橡胶支座(该天桥有 3 排墩柱,中间两墩柱简称中墩,两侧的墩柱简称边墩);③ 工况 3 为中墩固结,两侧边墩均设置支座;④ 工况 4 为全桥墩柱与梁体均采用支座连接。

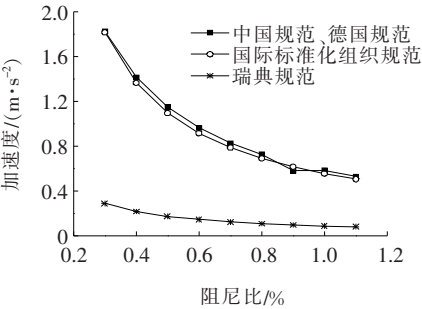


图 8 不同阻尼比的最大加速度

表 3、4 分别为不同工况下天桥的自振频率和最大加速度。

表 3 不同支座形式下的自振频率

模态	自振频率/Hz			
	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4
1	1.062	1.062	1.062	1.062
2	1.453	1.452	1.452	1.452
3	1.546	1.546	1.546	1.545
4	1.571	1.571	1.571	1.571
5	1.953	1.953	1.953	1.952
6	2.112	2.112	2.112	2.112
7	2.740	2.740	2.740	2.740
8	2.930	2.930	2.930	2.930

表 4 不同支座形式下的最大加速度

规范类别	最大加速度/(m·s <sup>-2</sup> )			
	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4
中国规范	0.581	0.605	0.606	0.606
德国规范	0.963	1.002	1.003	1.003
国际标准化组织规范	0.518	0.652	0.652	0.653
瑞典规范	0.144	0.153	0.154	0.155

由表 3、4 可以看出:不同支座形式对天桥的自振频率影响不大,随着设置支座的增加,自振频率基本不变。对于不同支座形式下的最大加速度,随着设置支座的增加,天桥在人行荷载激励下的最大加速度均略有增加,表明了增加支座、增加边界条件的约束会使其加速度增大,对人行致振的舒适度不利。因此,在设计条件允许的情况下,可尽量减少天桥支座的设置,降低支座形式对天桥舒适度的不利影响,该文设计的天桥最终采用全桥墩梁固结的形式。

3.5 不同评价标准的舒适度分析

基于以上参数影响分析,依据不同规范确定的人群荷载模型以及相应的舒适度评价标准对该人行天桥进行验算。

中国规范基于峰值加速度对行人舒适度评价分为最佳、合格、不合格三个等级,舒适度评价应高于不合格的评价标准,宜达到最佳舒适度评价。该文研究的人行天桥的竖向峰值加速度出现在模态 4 频率  $f_s = 1.571$  Hz 时,加速度  $a = 0.581$  m/s<sup>2</sup>,位于舒适度评价为合格的区间内( $a_{\max} = 0.356 \sim 0.627$  m/s<sup>2</sup>),满足舒适度验算要求。

德国规范将舒适度评价分为好、中等、差、不可接受四个等级,验算时分人群密度  $d = 0.5$  人/m<sup>2</sup> 和  $d = 1.5$  人/m<sup>2</sup> 两个工况进计算,需分别满足好和中等的舒适度评价等级。该文研究的人行天桥依据德国规范计算得到两种工况下的峰值加速度分别为 0.251 m/s<sup>2</sup> 和 0.581 m/s<sup>2</sup>,满足验算要求。

国际标准化组织规范是通过给对给定最敏感的舒适度基准曲线乘以一定的倍数得到各频率下的加速度临界峰值<sup>[15]</sup>,规范推荐对基准曲线乘以 60~128 的放大系数得到不同频率下临界峰值加速度,如表 5 所示,计算所得加速度  $a = 0.630$  m/s<sup>2</sup>,小于 60~128 倍竖向加速度标准曲线的临界值,满足验算要求。

瑞典规范对舒适度评价标准的规定比较简单,桥梁任意位置竖向加速度的平方根 $\leq 0.5$  m/s<sup>2</sup> 则满足要求,计算所得的峰值加速度平方根为 0.318 m/s<sup>2</sup>,满足验算要求。

4 结 论

以一座大跨径柔性拱钢—混组合梁人行天桥为例,通过 Midas/Civil 软件建立有限元模型基于 4 种规范考察天桥的动力响应,研究不同人群荷载模型、行走频率和人群密度的关系、阻尼比、支座设置形式对结构

表 5 不同规范舒适度验算标准

规范类别	工况	竖向加速度标准 $a_{\max}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	该文计算最大值 $a/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	是否满足 验算标准
中国规范	最佳	$[0, 0.25f^{0.78})$	0.581( $f_s=1.571\text{ Hz}$ )	满足合 格标准
	合格	$[0.25f^{0.78}, \min(0.5f^{0.5}, 0.7))$		
	不合格	$[\min(0.5f^{0.5}, 0.7), \infty)$		
德国规范	工况 1(常遇, $d=0.5\text{ 人}/\text{m}^2$ )	$<0.5$	0.251( $f_s=1.571\text{ Hz}$ )	满足
	工况 2(偶遇, $d=1.5\text{ 人}/\text{m}^2$ )	$0.5\sim 1.0$	0.581( $f_s=1.571\text{ Hz}$ )	
国际标准化 组织规范	60~128 倍竖向	$f=1.453\text{ Hz}$ 时, $<0.509\sim 1.087$	0.630( $f_s=2.740\text{ Hz}$ )	满足
	加速度标准曲线	$f=1.571\text{ Hz}$ 时, $<0.486\sim 1.037$		
		$f=2.740\text{ Hz}$ 时, $<0.365\sim 0.779$		
瑞典规范		$\sqrt{a_{\max}}\leq 0.5$	$\sqrt{a}=0.318$	满足

动力响应的影响;基于不同规范规定的舒适度评价标准对该人行天桥舒适度进行验算和综合评估,可得以下结论:

(1) 天桥的振动形式主要是柔性拱的侧向弯曲和主梁的竖向弯曲,大跨度的柔性拱及其吊杆刚度较小,导致其侧向固有频率较小,竖向固有频率小于 3 Hz。

(2) 中国规范和德国规范是基于相同的人群荷载计算模型,规定了与步行频率相关的折减系数  $\psi$ ,得到加速度分布规律不同于国际标准化组织和瑞典规范。

(3) 人群密度是随着行走频率加快而减少的;随着天桥阻尼比的增加,结构的峰值加速度随之减小;增加支座设置,对人行致振的舒适度不利。在计算中应结合实际工程选取合理人群密度、阻尼比和支座设置形式,减小对计算结果的影响,使设计有利于舒适度。

(4) 考虑不同人群荷载模型、行走频率、人群密度、阻尼比和支座设置形式等参数的影响,该文人行天桥的舒适度水平均满足不同规范规定的舒适度评价标准。

参考文献:

[1] 吴建东,周祥树.大跨度人行桥 TMD 减振分析[J].中外公路,2013,33(4):220—223.

[2] 褚东升,赵国栋,曾革助.空间异形桁架人行天桥设计与计算[J].中外公路,2017,37(5):127—130.

[3] 冯鹏,金飞飞,叶列平,等.人行天桥结构振动舒适度量化与振动特性实测研究[J].振动工程学报,2013,26(4):545—553.

[4] 北京市政工程研究院.城市人行天桥与人行地道技术规范:CJJ 69—95[S].北京:中国建筑工业出版社,1996.

[5] 北京市政工程研究院.城市人行天桥与人行地道技术规范(征求意见稿):CJJ 69—201x[S].北京:中国建筑工业出版社.

[6] EN 03. Design of Footbridges Guideline: Human Induced Vibrations of Steel Structures[S]. 2008.

[7] ISO 10137—2007. Bases for Design of Structures-Service Ability of Buildings and Walkways Against Vibrations [S]. 2007.

[8] 国家卫生健康委员会.中国居民营养与慢性病状况报告[J].营养与食品卫生,2015(8):6—9.

[9] Bro 2004. Vagverkets Allmanna Tekniska Beskrivning for Nybyggande och Forbattring Avbroar Svensk Byggtjanst [S]. 2004.

[10] 何超波,汪大洋,张永山,等.行人荷载激励下基于二次设计的大跨人行连廊 TMD 减振控制研究[J].防灾减灾学报,2017,33(1):86—93.

[11] 陈峰.混凝土自锚式人行悬索桥结构静动力行为分析研究[D].广州:广东工业大学,2008.

[12] 朱准峰.自锚式人行悬索桥人致振动及振动控制研究[D].长沙:中南大学,2014.

[13] 聂建国,陈宇,樊健生.步行荷载作用下单跨人行桥振动的均方根加速度反应谱法[J].土木工程学报,2010,43(9):109—116.

[14] 惠晓丽.激励—传播—感知全路径人行桥振动舒适度评估与振动控制[D].兰州:兰州理工大学,2019.

[15] 孙沪.异形钢拱人行桥通行舒适度及其控制研究[D].杭州:浙江工业大学,2015.