

变截面梁单元刚度矩阵的推导及影响因素分析

陈代海¹, 周帅¹, 李银鑫¹, 刘明杰¹, 李波²

(1 郑州大学 土木工程学院, 河南, 郑州 450001; 2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司, 湖北 武汉 430063)

摘要:基于能量变分原理, 推导变截面空间梁单元刚度矩阵, 得到2结点与3结点变截面梁单元刚度矩阵的具体表达式, 并通过对比相应 Ansys 单元类型的计算结果验证其正确性。在此基础上, 采用 Ansys 建立变截面连续梁模型, 分析变截面单元简化为等截面单元、梁高变化线形及变截面单元划分长度对变截面连续梁静力位移的影响。分析结果表明: 推导的变截面梁单元刚度矩阵可用于变截面结构的有限元分析, 并可为有限元计算程序的编制提供参考; 在建立变截面连续梁有限元模型时, 宜将变截面单元划分长度控制在变截面段长度的1/7以内, 当单元划分长度达到变截面段长度的1/6~1/5时, 不宜采用等截面对其进行简化; 梁高变化线形对变截面连续梁的质量分布影响较小, 而对其刚度分布影响较大。

关键词:变截面梁单元; 刚度矩阵; 等截面; 梁底线形变化; 单元划分长度

变截面结构由于其能合理分配自重, 充分发挥材料强度优势, 受力合理, 因此在实际工程中应用广泛。在对其进行有限元数值分析时, 需要推导变截面梁单元刚度矩阵, 王勘成^[1]、叶康生等^[2]进行了理论基础研究; 传光红等^[3]等采用势能驻值的原理, 推导了变截面 Timoshenko 梁的单元刚度矩阵; Al-Gahtani H J^[4]研究了变截面 Bernoulli-Euler 梁的轴力、弯曲及扭转单元刚度矩阵; 张琪等^[5]通过 Hamilton 原理, 推导出变截面梁段单元的自由振动方程, 得到了单元刚度矩阵; 李爽等^[6]利用平衡条件得到梁截面内力的分布模式, 在其变形前建立平衡方程, 再由虚力原理导得刚度矩阵; 马志贵等^[7]假定变截面的形式为梁高线性变化, 根据有限元基本原理, 推导出变截面梁单元的单元刚度矩阵公式; John S, et al^[8]讨论了一种新型的变截面单元的刚度矩阵, 并对其进行试验研究; 陆念力^[9]、武芳^[10]中采用直接法或传递矩阵法推导单元刚度矩阵; 传光红、陆念力、耿文宾通过将变截面梁单元进行简化, 如单元两端截面等效为单元中间截面, 将截面两端惯性矩做平均化处理等, 从而得出变截面梁单元的刚度矩阵^[3,9,11]; Al-Gahtani H J、李爽、John S、武芳没有给出变截面梁单元刚度矩阵的具体表达式或需要确定的参数较多^[4,6,8,10], 不便于实际应用。因此, 该文基于能量变分原理, 推导变截面空间梁单元刚度矩阵,

得到2结点与3结点变截面梁单元刚度矩阵的具体表达式, 并通过对比相应 Ansys 单元类型的计算结果验证其正确性。在此基础上, 采用 Ansys 建立变截面连续梁模型, 分析变截面单元简化为等截面单元、梁高变化线形及变截面单元划分长度对变截面连续梁静力位移的影响。

1 变截面梁单元刚度矩阵的推导

有限单元法中, 常采用2结点单元或3结点单元离散变截面梁。该文基于能量变分原理, 建立轴力单元、扭转单元及弯曲单元的泛函, 根据弹性力学基本方程及边界条件, 求泛函的驻值, 得到变截面梁单元的刚度矩阵表达式。

1.1 2结点变截面梁单元

对变截面梁单元刚度矩阵的推导, 可在局部坐标中考虑梁单元承受的横向荷载及弯矩。以承受均布荷载 $q(x)$ 和集中荷载 P_j 作用的悬臂梁为例, 如图1所示, 其挠度函数为 $w(x)$ 。

根据弹性力学基本方程可得:

$$k = -\frac{d^2 w}{dx^2}, M = -EI_t \frac{d^2 w}{dx^2}, Q = \frac{dM}{dx} =$$

收稿日期: 2021-10-20 (修改稿)

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (编号: 51408557); 中国博士后科学基金资助项目 (编号: 2013M541995); 河南省交通运输科技计划项目 (编号: 2002J-2-6)

作者简介: 陈代海, 男, 博士, 副教授. E-mail: chendaihai1982@163.com

$$-EI_t \frac{d^3 \omega}{dx^3}, \theta = \frac{d\omega}{dx} \quad (1)$$

式中: k 为梁中面变形后的曲率; M 为截面承受的弯矩; Q 为截面承受的剪力; θ 为端部给定的转角; I_t 为截面惯性矩; E 为弹性模量; x 为梁端到计算截面的距离。

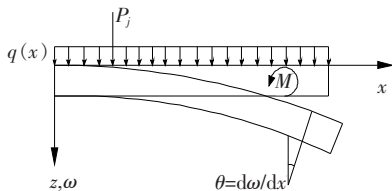


图1 弯曲变形梁单元示意图

根据能量变分原理建立泛函如下:

$$K^{\omega} = \int_0^l \frac{EI_t}{l^3} \left(\frac{d^2 N}{d\xi^2} \right)^T \left(\frac{d^2 N}{d\xi^2} \right) d\xi = \begin{bmatrix} K_{11}^{\omega y(z)} & K_{12}^{\omega y(z)} & K_{13}^{\omega y(z)} & K_{14}^{\omega y(z)} \\ K_{22}^{\omega y(z)} & K_{23}^{\omega y(z)} & K_{24}^{\omega y(z)} & \\ K_{33}^{\omega y(z)} & K_{34}^{\omega y(z)} & & \\ & K_{44}^{\omega y(z)} & & \end{bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} (12\xi-6)^2 & (12\xi-6)(6\xi-4)l & -(12\xi-6)^2 & (12\xi-6)(6\xi-2)l \\ (6\xi-4)^2 l^2 & (6\xi-4)(6-12\xi)l & (6\xi-4)(6\xi-2)l^2 & \\ (6-12\xi)^2 & (6-12\xi)(6\xi-2)l & & \\ & (6\xi-2)^2 l^2 & & \end{bmatrix}$$

推导变截面梁单元的轴力刚度矩阵及扭转刚度矩阵时,采用拉格朗日插值多项式表示其位移函数为:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) u_i = Nu^e \quad (5)$$

式中: $N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$; $N_2 = \frac{1}{2}(1+\xi)$; u_i 为结点位移; u^e 为 u_i 的矩阵表示形式。

采用类似于梁单元弯曲刚度矩阵的推导方法,可得到变截面梁单元的轴力刚度矩阵 K^a 及扭转刚度矩阵 K^b 。

以矩形变截面梁单元为例,其宽度为 b ,假设截面高度 $h = h_0 + mx$,其中 h_0 为起始端单元高度, m 为梁高线性变化的比例系数。则沿单元局部坐标轴 y 轴和 z 轴的惯性矩分别为 $I_y = hb^3/12$ 和 $I_z = bh^3/12$,单元截面面积为 $A = bh$ 。其轴力刚度矩阵 K^a 及扭转刚度矩阵 K^b 为:

$$K^a = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a \end{bmatrix} = \frac{Eb}{2l} \begin{bmatrix} lm+2h_0 & -lm-2h_0 \\ -lm-2h_0 & lm+2h_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\prod_p(\omega_x) = \int_0^l \frac{EI_t}{2} \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l q(x) \omega dx - \sum_j p_j \omega_j + \sum_k M_k \left(\frac{d\omega}{dx} \right)_k \quad (2)$$

由有限单元法计算梁单元的弯曲刚度矩阵时,采用一维 Hermite 插值多项式表示挠度插值函数为:

$$\omega(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi) \alpha_i = N\alpha^e \quad (3)$$

式中: $N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_2 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l$, $N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_4 = (\xi^3 - \xi^2)l$; l 为悬臂梁长度; α_i 为结点位移; N 为形函数; α^e 为 α_i 的矩阵表示形式。

将式(3)代入式(2),求解 $\delta \prod_p = 0$, 得到 $K^a = P$,即可求得任意变截面梁单元的弯曲刚度矩阵 K^{ω} 为:

$$K^b = \begin{bmatrix} k_{11}^b & k_{12}^b \\ k_{21}^b & k_{22}^b \end{bmatrix} = \frac{G\beta b^3}{2l} \begin{bmatrix} lm+2h_0 & -lm-2h_0 \\ -lm-2h_0 & lm+2h_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: β 为截面扭转系数; G 为剪切模量; 则单元刚度矩阵 K^e 可以表示为:

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} k_{ij}^a & 0 & 0 \\ 0 & k_{ij}^{\omega y(z)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{ij}^b \end{bmatrix}$$

式中: $k_{ij}^e = 0$ $k_{ij}^{\omega y(z)}$ 0 ($i, j = 1, 2$); k_{ij}^a 、 k_{ij}^b 、 $k_{ij}^{\omega y(z)}$ 为轴力单元、扭转单元及弯曲单元刚度矩阵的子矩阵。则矩形变截面梁单元刚度矩阵可表示为[见式(9)]:

在实际工程中,受到弯曲变形的影响,梁单元所受横向剪力将引起其附加挠度,即变形后的梁单元会发生翘曲。式(9)中并未考虑剪切变形的影响,且构造位移函数时,截面转动角度为: $\theta = d\omega/dx$,若在此基础上考虑剪切变形,其推导过程将较为复杂。因此,在保证精度的前提下简化推导过程,对挠度 ω 与截面转动

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{11}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{12}^{\omega z} & 0 & k_{13}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{14}^{\omega z} \\ & & k_{11}^{\omega y} & 0 & k_{12}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{13}^{\omega y} & 0 & k_{14}^{\omega y} & 0 \\ & & & k_{11}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^b & 0 & 0 \\ & & & & k_{22}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{23}^{\omega y} & 0 & k_{24}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & k_{22}^{\omega z} & 0 & k_{23}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{24}^{\omega z} \\ & & & & & & k_{22}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{33}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{34}^{\omega z} \\ & & & & & & & & k_{33}^{\omega y} & 0 & k_{34}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & k_{22}^b & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{44}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & & & k_{44}^{\omega z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

角度 θ 进行独立插值, 推导变截面梁考虑剪切变形时的单元刚度矩阵。

梁发生剪切变形时, 剪切应变为: $\gamma = \frac{d\omega}{dx} - \theta$, 根据能量变分原理建立泛函如下:

$$\Pi_p(\omega_x) = \int_0^l \frac{EI_x}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \int_0^l \frac{GA}{2k} \gamma^2 dx - \int_0^l q(x) \omega dx - \sum_j p_j \omega_j + \sum_k M_k \theta_k \quad (10)$$

对式(10)求驻值, 可得到梁单元弯剪刚度矩阵为:

$K^\omega = K^{\omega y(z)} + K^s$ 。

以矩形变截面梁单元为例, 参数同上, 推导 2 结点变截面梁单元的刚度矩阵。其弯曲刚度矩阵 $K^{\omega y(z)}$ 及剪切刚度矩阵 K^s 表示如下:

$$K^{\omega y} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\omega y} & k_{12}^{\omega y} & k_{13}^{\omega y} & k_{14}^{\omega y} \\ & k_{22}^{\omega y} & k_{23}^{\omega y} & k_{24}^{\omega y} \\ \text{对} & & k_{33}^{\omega y} & k_{34}^{\omega y} \\ \text{称} & & & k_{44}^{\omega y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Eb^3}{24l} \text{对} & lm+2h_0 & 0 & -lm-2h_0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$K^{\omega z} = \begin{bmatrix} k_{11}^{\omega z} & k_{12}^{\omega z} & k_{13}^{\omega z} & k_{14}^{\omega z} \\ & k_{22}^{\omega z} & k_{23}^{\omega z} & k_{24}^{\omega z} \\ \text{对} & & k_{33}^{\omega z} & k_{34}^{\omega z} \\ \text{称} & & & k_{44}^{\omega z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Eb}{24l} \text{对} & (lm+h_0)^4 - h_0^4 & 0 & -(lm+h_0)^4 + h_0^4 \\ & & 0 & 0 \\ \text{称} & & & (lm+h_0)^4 - h_0^4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$K^s = \begin{bmatrix} k_{11}^s & k_{12}^s & k_{13}^s & k_{14}^s \\ & k_{22}^s & k_{23}^s & k_{24}^s \\ \text{对} & & k_{33}^s & k_{34}^s \\ \text{称} & & & k_{44}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{lm+2h_0}{l^2} & \frac{m}{3} + \frac{h_0}{l} & -\frac{lm+2h_0}{l^2} & \frac{2m}{3} + \frac{h_0}{l} \\ \frac{lm}{6} + \frac{2h_0}{3} & -\frac{m}{3} - \frac{h_0}{l} & \frac{lm}{6} + \frac{h_0}{3} & \frac{Gbl}{2k} \\ \text{对} & & \frac{lm+2h_0}{l^2} & -\frac{2m}{3} - \frac{h_0}{l} \\ \text{称} & & & \frac{lm}{2} + \frac{2h_0}{3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: k 为横截面剪应力影响系数, 对于矩形截面, $k = 6/5$ 。则考虑剪切变形的 2 结点变截面梁单元刚度矩阵如式(9)所示。

1.2 3 结点变截面梁单元

3 结点梁单元刚度矩阵的推导方法与 2 结点单元类似, 其位移函数采用拉格朗日插值多项式可表示为:

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) u_i = Nu^e \quad (14)$$

式中: $N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$; $N_2 = 1-\xi^2$; $N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$ 。

3 结点矩形变截面单元的轴力刚度矩阵及扭转单元刚度矩阵可表示为:

$$K^a = \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & k_{13}^a \\ \text{对} & k_{22}^a & k_{23}^a \\ \text{称} & & k_{33}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3lm+14h_0 & -4lm-16h_0 & lm+2h_0 \\ \text{对} & 16lm+32h_0 & -12lm-16h_0 \\ \text{称} & & 11lm+14h_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$K^b = \begin{bmatrix} k_{11}^b & k_{12}^b & k_{13}^b \\ \text{对} & k_{22}^b & k_{23}^b \\ \text{称} & & k_{33}^b \end{bmatrix} = \frac{G\beta b^3}{6l} \begin{bmatrix} 3lm+14h_0 & -4lm-16h_0 & lm+2h_0 \\ \text{对} & 16lm+32h_0 & -12lm-16h_0 \\ \text{称} & & 11lm+14h_0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

单元弯剪刚度矩阵为:

$$K^{\omega y} = \frac{Eb}{6l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{62} & 0 & k_{64} & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{式中: } k_{22} = \frac{7l^3 m^3}{120} + \frac{3h_0 l^2 m^2}{10} + \frac{3lmh_0^2}{4} + \frac{7h_0^3}{6}; k_{24} = k_{42} = -\frac{l^3 m^3}{6} - \frac{3h_0 l^2 m^2}{5} - lmh_0^2 - \frac{4h_0^3}{3}; k_{26} = k_{62} = \frac{13l^3 m^3}{120} + \frac{3h_0 l^2 m^2}{10} + \frac{lmh_0^2}{4} + \frac{h_0^3}{6}; k_{44} = \frac{14l^3 m^3}{15} + \frac{16h_0 l^2 m^2}{5} + 4lmh_0^2 + \frac{8h_0^3}{3}; k_{46} = k_{64} = -\frac{23l^3 m^3}{30} - \frac{13h_0 l^2 m^2}{5} - 3lmh_0^2 - \frac{4h_0^3}{3}; k_{66} = \frac{79l^3 m^3}{120} + \frac{23h_0 l^2 m^2}{10} + \frac{11lmh_0^2}{4} + \frac{7h_0^3}{6}。$$

$$K^{\omega z} = \frac{Eb^3}{6l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{62} & 0 & k_{64} & 0 & k_{66} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{式中: } k_{22} = \frac{lm}{4} + \frac{7h_0}{6}; k_{24} = k_{42} = \frac{-lm-4h_0}{3}; k_{26} = k_{62} = \frac{lm}{12} + \frac{h_0}{6}; k_{44} = \frac{4lm+8h_0}{3}; k_{46} = k_{64} = lm - \frac{4h_0}{3}; k_{66} = \frac{11lm}{12} + \frac{7h_0}{6}。$$

$$K^s = \frac{Gbl}{2k} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \text{对} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ \text{称} & & k_{55} & k_{56} \\ & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{式中: } k_{11} = \frac{m}{l} + \frac{14h_0}{3l}; k_{12} = \frac{2m}{15} + \frac{h_0}{l}; k_{13} = \frac{-4m}{3l} - \frac{16h_0}{3l^2}; k_{14} = \frac{2m}{5} + \frac{4h_0}{3l}; k_{15} = \frac{m}{3l} + \frac{2h_0}{3l^2}; k_{16} = -\frac{m}{5} - \frac{h_0}{3l}; k_{22} = \frac{lm}{30} + \frac{4h_0}{15}; k_{23} = -\frac{4m}{15} - \frac{4h_0}{3l}; k_{24} = \frac{2h_0}{15}; k_{25} = \frac{2m}{15} + \frac{h_0}{3l}; k_{26} = -\frac{lm}{30} - \frac{h_0}{15}; k_{33} = \frac{16m}{3l} + \frac{32h_0}{3l^2}; k_{34} = \frac{8m}{15}; k_{35} = -\frac{4m}{l} - \frac{16h_0}{3l^2}; k_{36} = \frac{16m}{15} + \frac{4h_0}{3l}; k_{44} = \frac{8lm+16h_0}{15}; k_{45} = -\frac{14m}{15} - \frac{4h_0}{3l}; k_{46} = \frac{2lm+2h_0}{15}; k_{55} = \frac{11m}{3l} + \frac{14h_0}{3l^2}; k_{56} = -\frac{13m}{15} - \frac{h_0}{l}; k_{66} = \frac{7lm}{30} + \frac{4h_0}{15}。$$

则 3 结点变截面梁单元刚度矩阵可以表示为[见式(20)]:

2 变截面梁单元刚度矩阵的验证

为验证上述 2 结点单元与 3 结点单元刚度矩阵表达式的正确性,以如图 2 所示的变截面悬臂梁为研究对象,运用 Ansys 有限元软件,分别采用 Beam44 和 Beam189 单元建立其有限元模型。悬臂梁长 l 为 1 m, i 端截面高 h_i 为 0.2 m,宽 b_i 为 0.1 m; j 端截面高 h_j 为 0.3 m,宽 b_j 为 0.1 m,弹性模量 E 为 2×10^8 Pa,泊松比 μ 为 0.2,剪切模量 G 为 8.333×10^7 Pa。悬臂梁一端固定,一端自由,自由端施加荷载 $F_x = 50$ N, $F_y = 50$ N, $F_z = 50$ N, $M_x = 50$ N·m, $M_y = 50$ N·m, $M_z = 50$ N·m。

基于上述推导过程得到单元刚度矩阵 K [计算式见式(9)、(20)],结合荷载列阵 P ,求解静力平衡方程 $K^a = P$,得到悬臂梁自由端的位移,并与 Ansys 计算结果进行对比,如表 1 所示。

由表 1 可以看出:根据能量变分法推导的变截面梁单元刚度矩阵,对于 2 结点单元与 3 结点单元,该文计算结果与 Ansys 计算结果基本一致,验证了该文变截面梁单元刚度矩阵表达式的正确性,其可用于变截面结构的有限元分析。

3 变截面梁单元在数值模拟中的影响因素分析

在连续梁桥的有限元数值模拟中,变截面梁单元

$$K^e = \begin{bmatrix} k_{11}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & k_{11}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{12}^{\omega z} & 0 & k_{13}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{14}^{\omega z} & 0 & k_{15}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{16}^{\omega z} \\ & & k_{11}^{\omega y} & 0 & k_{12}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{13}^{\omega y} & 0 & k_{14}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{15}^{\omega y} & 0 & k_{16}^{\omega y} & 0 \\ & & & k_{11}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{13}^b & 0 & 0 \\ & & & & k_{22}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{23}^{\omega y} & 0 & k_{24}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{25}^{\omega y} & 0 & k_{26}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & k_{22}^{\omega z} & 0 & k_{23}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{24}^{\omega z} & 0 & k_{25}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{26}^{\omega z} \\ & & & & & & k_{22}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{33}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{34}^{\omega z} & 0 & k_{35}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{36}^{\omega z} \\ & & & & & & & & k_{33}^{\omega y} & 0 & k_{34}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{35}^{\omega y} & 0 & k_{36}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & k_{22}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{23}^b & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{44}^{\omega y} & 0 & 0 & 0 & k_{45}^{\omega y} & 0 & k_{46}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & & & k_{44}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{46}^{\omega z} \\ & & & & & & & & & & & & k_{33}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & k_{55}^{\omega z} & 0 & 0 & 0 & k_{56}^{\omega z} \\ & & & & & & & & & & & & & & k_{55}^{\omega y} & 0 & k_{56}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & k_{33}^b & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & k_{66}^{\omega y} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & k_{66}^{\omega z} \end{bmatrix}$$

(20)

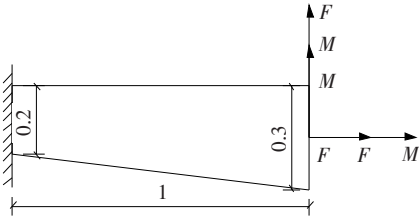


图 2 变截面悬臂梁示意图(单位:m)

应用较多。以往的有限元分析中,为简化运算,常将变截面梁单元换算为等截面单元,由此带来的计算误差值得研究。另外,由上述变截面梁单元刚度矩阵的表达式可以看出,单元长度和截面高度是影响梁单元刚度的主要因素。因此,该文以 3 跨变截面连续梁桥为研究对象,采用 Ansys 软件建立其有限元模型,分析变截面单元简化为等截面单元、梁高变化线形及变截面单元划分长度等因素对桥梁结构静位移的影响。

表 1 悬臂梁自由端的位移对比

单元	项目	线位移/mm			转角位移/(10 ⁻³ rad)		
		<i>u_x</i>	<i>u_y</i>	<i>u_z</i>	<i>θ_x</i>	<i>θ_y</i>	<i>θ_z</i>
2 结点单元	该文计算结果	0.010	10.100	-0.316	9.804	0.943	18.160
	Beam44	0.010	10.100	-0.317	9.799	0.932	18.180
3 结点单元	该文计算结果	0.018	9.750	-0.498	8.187	1.148	18.649
	Beam189	0.018	9.750	-0.500	8.187	1.150	18.649

3.1 工程实例

某变截面连续梁桥跨度为:(40+64+40) m,桥梁宽 7.1 m,变截面段长 29.5 m,桥梁纵向布置如图 3 所示。边支点处截面高 2.8 m,中支点处截面高 5.2 m,截面尺寸如图 4 所示。采用 C50 混凝土,其弹性模量 *E* 为 3.45×10¹⁰ Pa,泊松比 *μ* 为 0.2,材料重度 *γ* 为 25 kN/m³。考虑桥梁结构自重和均布荷载 *Q* =

100 kN/m 的作用。

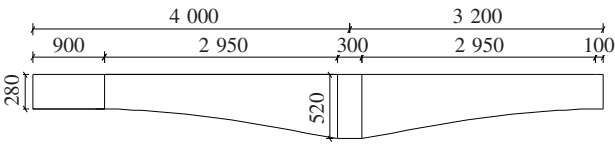


图 3 变截面连续梁纵向示意图(单位:cm)

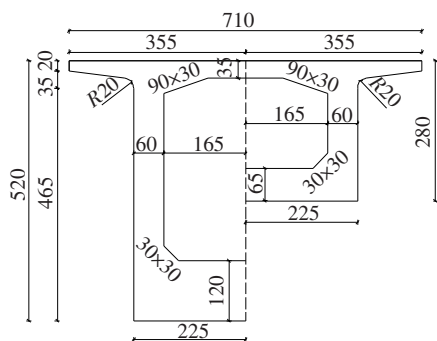


图4 变截面连续梁截面示意图(单位:cm)

3.2 变截面单元简化为等截面单元的影响

基于上述工程实例,变截面梁高按 2 次抛物线变化,对于每个变截面单元,单元长度分别选取为 3、4、5 和 6 m,采用两种等截面分别对变截面进行简化:一种等截面定义为等截面 1,为变截面单元的中部截面;另一种等截面定义为等截面 2,其截面特性在有限元模型中以实常数的形式表示,实常数中的截面面积取两端截面面积的算术平均值,惯性矩取两端截面的几何平均值。用 Ansys 软件中的 2 结点变截面单元 Beam44 离散变截面连续梁,建立变截面单元简化为等截面单元的连续梁有限元模型。在均布荷载作用下,计算桥梁的竖向位移,结果如表 2 所示。

表 2 不同计算模型的桥梁竖向位移对比

位置	单元长度/m	不同截面竖向位移/mm			最大相对差值/%
		变截面	等截面 1	等截面 2	
边跨跨中	3	0.616	0.625	0.626	1.62
	4	0.615	0.629	0.633	2.93
	5	0.608	0.634	0.649	6.74
	6	0.586	0.647	0.653	11.43
中跨跨中	3	12.765	12.891	12.922	1.23
	4	12.644	12.873	12.886	1.92
	5	11.977	12.842	12.851	7.30
	6	11.316	12.826	12.841	13.48

由表 2 可以看出:两种等截面模型的计算结果相近,说明两种等截面均可用于简化变截面。变截面单元简化为等截面单元时,当变截面单元划分长度为 3、4 m,即为变截面段长度的 1/10 和 1/7 时,等截面与变截面模型的位移值相差较小,最大相对差值小于 3%;当变截面单元划分长度为 5、6 m,即为变截面段长度的 1/6 和 1/5 时,等截面与变截面模型的最大位移差

值较大,最大相对差值为 13.48%。因此,在建立变截面梁单元模型时,当单元划分长度达到变截面段长度的 $1/6 \sim 1/5$ 时,不宜采用等截面对其进行简化。

3.3 梁高变化线形的影响

变截面连续梁梁高变化线形常以抛物线为主,为研究抛物线形状引起的梁高变化对桥梁刚度的影响,采用 Ansys 软件中的 3 结点单元 Beam189 离散变截面连续梁,建立梁高变化线形分别为 1.5、1.8 和 2 次抛物线时的 3 种有限元模型,在均布荷载作用下,计算桥梁的竖向位移,在自重作用下,计算桥梁支座反力。不同梁高变化线形下的桥梁竖向位移对比如图 5 所示,支座反力对比如表 3 所示。

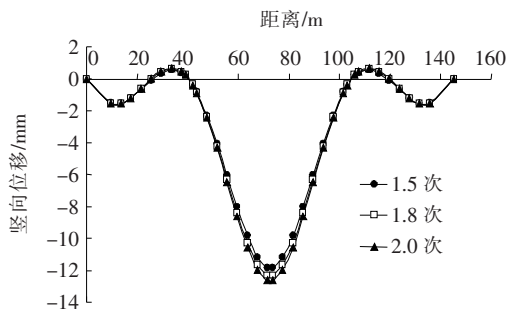


图 5 不同梁高变化线形下的桥梁竖向位移对比

表 3 不同梁高变化线形下的桥梁支座反力对比

梁高变化线形	支座反力/kN	
	边支点	中支点
1.5 次	1 912	1 300
1.8 次	1 900	1 280
2.0 次	1 890	1 269

由图 5 可知:在均布荷载作用下,桥梁跨中最大位移值随着梁高变化抛物线形阶次的增加而增大,最大相对差值为 6.45%。由表 3 可知:在自重作用下,桥梁支座反力随着梁高变化抛物线形阶次的增加而减小,最大相对差值为 2.5%。说明当梁高变化线形分别为 1.5、1.8 和 2 次抛物线时,梁高变化线形对变截面连续梁的质量分布影响较小,而对其刚度分布影响较大。

3.4 变截面单元长度的影响

为分析变截面单元划分长度对桥梁刚度的影响,采用 Ansys 中的 3 结点单元 Beam189 离散变截面连续梁,建立单元长度分别为 3、4、5 和 6 m 时的 4 种有限元模型,计算均布荷载作用下的桥梁竖向位移,得到其竖向位移对比如图 6 所示。

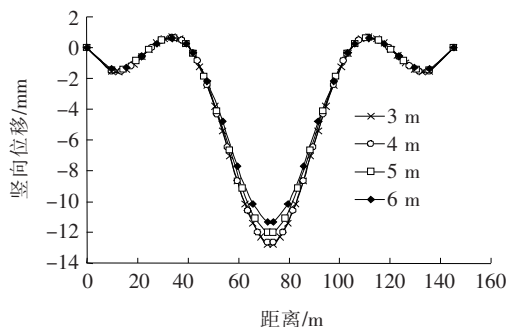


图 6 不同变截面单元划分长度下的桥梁竖向位移

从图 6 可以看出:当变截面单元划分长度为 3、4 m,即为变截面段长度的 $1/10$ 和 $1/7$ 时,两种模型的位移值基本吻合;当变截面单元划分长度为 5、6 m,即为变截面段长度的 $1/6$ 和 $1/5$ 时,桥梁跨中的最大竖向位移差值较大。当变截面单元划分长度大于变截面段长度的 $1/7$ 后,随着单元长度的增大,桥梁跨中竖向位移最大值逐步减小。因此,为保证计算精度和效率,在建立变截面梁有限元模型时,宜将变截面单元划分长度控制在变截面段长度的 $1/7$ 以内。

4 结论

(1) 基于能量变分法,推导了 2 结点和 3 结点变截面梁单元的刚度矩阵具体表达式。并通过实例计算,对比分析 Ansys 软件计算结果,验证了其正确性,说明其可用于变截面结构的有限元分析,可为有限元计算程序的编制提供参考。

(2) 在建立变截面连续梁有限元模型时,宜将变截面单元划分长度控制在变截面段长度的 $1/7$ 以内。当单元划分长度达到变截面段长度的 $1/6 \sim 1/5$ 时,不宜采用等截面对其进行简化。

(3) 当梁高变化线形分别为 1.5、1.8 和 2 次抛物线时,梁高变化线形对变截面连续梁的质量分布影响较小,而对其刚度分布影响较大。

参考文献:

[1] 王勰成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.
[2] 叶康生,殷振炜. 欧拉梁弹性稳定分析的有限元 p 型超收敛算法[J]. 力学与实践,2018,40(6):647—652.

[3] 传光红,陈以一. 变截面 Timoshenko 梁的单元刚度矩阵[J]. 计算力学学报,2014,31(2):265—272.
[4] Al-Gahtani H J. Exact Stiffness for Tapered Members[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(10): 1 234—1 239.
[5] 张琪,罗旗帜,周旭辉. 薄壁曲线箱梁自由振动的有限段法[J]. 中外公路,2018,38(6):71—75.
[6] 李爽,谢礼立,鲍跃全. 直接基于单元平衡的变截面梁反应分析方法[J]. 计算力学学报,2009,26(2):226—231.
[7] 马志贵,施文龙. 基于 MATLAB 的变截面梁单元有限元分析[J]. 兰州工业学院学报,2015,22(5):1 009—2 269.
[8] John S. Horvath, Thomas Trochalides, et al. A New Type of Tapered Steel Pipe Pile for Transportation Applications[J]. Geo Trans, ASCE, 2004: 1 299—1 308.
[9] 陆念力,张宏生. 计及二阶效应的一种变截面梁精确单元刚度阵[J]. 工程力学,2008,25(12):60—64,78.
[10] 武芳. 变截面空间梁单元刚度矩阵及等效结点荷载公式[D]. 浙江大学硕士学位论文,2006.
[11] 耿文宾,李毓,等. 基于刚度矩阵的连续变截面空间梁单元的有限元分析[C]. 第 16 届北方七省市力学学会学术会议,2016.
[12] 姜奕红,罗旗帜,杜嘉斌. 多跨连续曲线梁桥静力分析的有限段法[J]. 铁道科学与工程学报,2005,2(6):83—87.
[13] 刘悦,王立平. 基于刚度矩阵的空间变截面梁简化问题[J]. 清华大学学报(自然科学版),2008,48(11):1 915—1 918.
[14] Li Haifeng, Luo Yongfeng. Application of Stiffness Matrix of a Beam Element Considering Section Distortion Effect[J]. Journal of South East University(English Edition), 2010, 26(3): 431—435.
[15] 蔡恒,卢海林,汤正. 基于板壳有限元理论的薄壁箱梁剪力滞效应[J]. 铁道科学与工程学报,2017,14(4):779—786.
[16] Ravikiran Kadoli, Kashif Akhtar, Ganesan N. Static Analysis of Functionally Graded Beams Using Higher Order Shear Deformation Theory[J]. Applied Mathematical Modeling, 2008, 32: 2 509—2 525.
[17] 罗帅,朱佳洋,梁超锋,等. 有限元模型的整体刚度矩阵集成[J]. 深圳大学学报(理工版),2018,35(5):467—472.