

锚拉板索梁锚固系统几何参数精确求解方法

李渊, 詹璐, 张铭

(湖北省交通规划设计院股份有限公司, 湖北 武汉 430051)

摘要:采用锚拉板索梁锚固形式的斜拉索系统事先无法明确拉索梁端锚点坐标, 针对该问题, 该文通过建立内外双重循环迭代模型, 在保证锚拉板轴线方向与斜拉索梁端受力切线方向一致的前提下, 得到斜拉索主梁锚点坐标及其他几何参数的精确解。通过算例对比近似解和精确解, 明确了采用锚拉板索梁锚固形式的大跨度斜拉桥精确求解斜拉索几何参数的必要性。

关键词: 锚拉板; 锚固系统; 几何参数; 改进的牛顿下山法; 精确解

1 概述

在大跨径斜拉桥中, 斜拉索作为联系桥塔和主梁的重要受力构件, 其锚点坐标、无应力索长、安装角度等参数对斜拉桥的设计和施工至关重要。关于拉索无应力索长、倾角等参数的近似求解法、高精度近似求解法、精确求解法, 许多文献已有充分研究, 但都是基于拉索梁端及塔端锚点坐标已知的前提。对于如图1所示采用锚拉板索梁锚固系统的斜拉索, 为使结构受力合理, 需要保证锚拉板轴线方向与斜拉索梁端锚点受力切线方向一致, 然而此二者相互影响, 事先却仅能确定拉索塔端锚点、锚拉板轴线与主梁交点、拉索锚点距主梁高度 d 等参数, 拉索梁端锚点坐标无从得知, 更无法得到拉索无应力索长等参数。

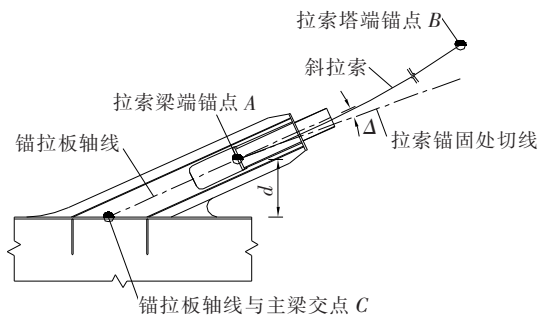


图1 锚拉板索梁锚固系统

针对采用锚拉板索梁锚固系统且斜拉索塔端张力已知的斜拉桥, 该文基于精确悬链线索形理论, 采用改进的牛顿下山法, 通过建立内外双重循环迭代模型,

在确保锚拉板轴线方向与斜拉索梁端受力切线方向一致($\Delta=0$)的前提下, 求解得到斜拉索梁端锚点坐标及无应力索长、塔端倾角、梁端倾角等参数的精确解, 其结果有助于判断近似解的合理性及精度。

2 求解悬链线索形方程

假定拉索为理想柔性, 且横截面保持不变, 对于如图2所示的拉索, 由微元体平衡条件可得:

$$\frac{y''_x}{\sqrt{1+(y'_x)^2}} = \frac{-q}{H} \quad (1)$$

式中: q 为拉索的重力集度; H 为索端的水平分力; y 为拉索各点的竖向坐标值; x 为拉索水平方向上各点的坐标。由式(1), 可求得悬链线索形方程:

$$y_x = \frac{l}{2b} \left[\operatorname{cha} - \operatorname{ch} \left(a - \frac{2b}{l} x \right) \right] \quad (2)$$

式中: $a = \operatorname{arsh} \left(\frac{b}{\operatorname{sh} b} \cdot \frac{h}{l} \right) + b$; $b = \frac{ql}{2H}$ 。

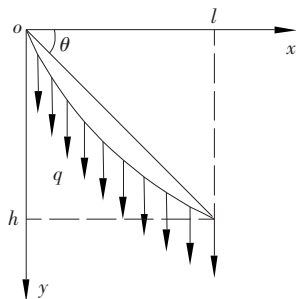


图2 拉索计算简图

拉索各点切线方向与水平方向的夹角可通过对悬链线索形方程求导得到:

$$y'_x = \text{sh}\left(a - \frac{2b}{l}x\right) \quad (3)$$

则各点处的张力:

$$T_x = H \sqrt{1 + (y'_x)^2} \quad (4)$$

其中,坐标原点处即桥塔处的拉索张力:

$$T_t = H \sqrt{1 + (y'|_{x=0})^2} = H \text{cha} \quad (5)$$

该公式可进一步改写为:

$$\left(\frac{2T_t}{qh} - 1\right)^2 = \frac{l^2}{b^2 h^2} \text{ch}^2 b + \text{cth}^2 b \quad (6)$$

针对塔端(即坐标原点处)拉索张力 T_t 已知的情况,对方程:

$$f(b) = \frac{l^2}{b^2 h^2} \text{ch}^2 b + \text{cth}^2 b - \left(\frac{2T_t}{qh} - 1\right)^2 \quad (7)$$

进行求解,得到满足 $f(b) = 0$ 时 b 的值,将该值代入式(2)即可求得拉索的悬链线方程。

式(7)是关于 b 的超越方程,其值一般需要通过迭代方法求解。通过塔端张力在拉索弦线水平方向的分力 H 确定初值 b_0 ,则:

$$b_0 = \frac{ql}{2T_t \cdot \cos\omega} = \frac{q \sqrt{l^2 + h^2}}{2T_t} \quad (8)$$

对式(7)求导得到:

$$f'(b) = \frac{2l^2 \text{ch}b \cdot \text{sh}b}{h^2 b^2} - \frac{2l^2 \text{ch}^2 b}{h^2 b^3} - \frac{2}{\text{th}^3 b \text{ch}^2 b} \quad (9)$$

通过改进的牛顿下山法迭代求解方程 $f(b)$,具体流程如下:

(1) 选取 b_0 为初始值。

(2) 取下山因子 $\lambda_0 = 1$ 。

(3) 计算 $b_{n+1}: b_{n+1} = b_n - \lambda_n \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}$ 。

(4) 计算 $f(b_{n+1})$, 并比较 $|f(b_{n+1})|$ 与 $|f(b_n)|$ 的大小,分以下两种情况:

① 若 $|f(b_{n+1})| < |f(b_n)|$, 则当 $|b_{n+1} - b_n| < \mu_2$ 时(μ_2 为适当小的正数), 取 $b \approx b_{n+1}$, 计算过程结束; 当 $|b_{n+1} - b_n| \geq \mu_2$ 时, 把 b_{n+1} 作为新的 b_n 值, 并重复回到(3)。

② 若 $|f(b_{n+1})| \geq |f(b_n)|$, 则当 $\lambda_n \leq \mu_\lambda$ 且 $|f(b_{n+1})| < \mu_1$ 时(μ_λ, μ_1 为适当小的正数), 取 $b \approx b_{n+1}$, 计算过程结束; 否则, 若 $\lambda_n \leq \mu_\lambda$, 而 $|f(b_{n+1})| \geq \mu_1$, 则给 b_{n+1} 加上一个选定的适当小正数 ζ , 即

取 $b_{n+1} + \zeta$ 作为新的 b_n 值, 并转向(3)重复计算; 当 $\lambda_n > \mu_\lambda$, 且 $|f(b_{n+1})| \geq \mu_1$ 时, 则 $\lambda_{n+1} =$

$$\frac{\lambda_n}{1 + \sqrt{\left| \frac{f(b_{n+1})}{f(b_n)} \right|}}, \text{把 } \lambda_{n+1} \text{ 作为新的 } \lambda_n \text{ 值转向(3)重}$$

复计算。

3 求解拉索各关键参数

将求解所得的 b 值代入式(3)可分别得到拉索在塔、梁锚固点处的切线角, 其中梁端拉索切线方向与水平方向的夹角为:

$$\theta_l = y'_l = \text{sh}(a - 2b) \quad (10)$$

塔端拉索切线方向与水平方向的夹角为:

$$\theta_0 = y'_0 = \text{sha} \quad (11)$$

拉索的悬链线索长、弹性伸长量及无应力索长可由下列公式求得:

悬链线索长:

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \sqrt{h^2 + \frac{l^2 \text{sh}^2 b}{b^2}} \quad (12)$$

拉索弹性伸长:

$$\Delta S = \int_0^S \frac{T}{EA} ds = \frac{q}{2EA} \left(h^2 \text{ch}b + \frac{l^2}{2b} + \frac{l^2}{2b^2} \text{sh}b \text{ch}b \right) \quad (13)$$

从而拉索无应力索长:

$$S_0 = S - \Delta S \quad (14)$$

对于图 3 所示的拉索空间角度, 可通过 C、B 两点(图 1)坐标求得 α_H , 根据空间角度之间的关系可得:

$$\beta_H = \frac{\pi}{2} - \alpha_H, \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0,$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \beta_0, \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma_0 \quad (15)$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_H \cdot \cos\gamma_0 = \cos\beta_0 \cdot \cos\alpha_v \quad (16)$$

$$\cos\beta = \cos\beta_H \cdot \cos\gamma_0 \quad (17)$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha_0 \cdot \cos\gamma_w \quad (18)$$

则:

$$\alpha_v = a \cos \left\{ \frac{\sin\beta_H \cdot \cos\gamma_0}{\sin[a \cos(\cos\beta_H \cdot \cos\gamma_0)]} \right\} \quad (19)$$

$$\gamma_w = a \cos \left\{ \frac{\sin\gamma_0}{\sin[a \cos(\sin\beta_H \cdot \cos\gamma_0)]} \right\} \quad (20)$$

其中 $\gamma_0 = \theta_l$ 。对于拉索在塔端的锚固点, 上述公式同样适用, 只需注意塔端锚固处 $\gamma_0 = \theta_0$ 。

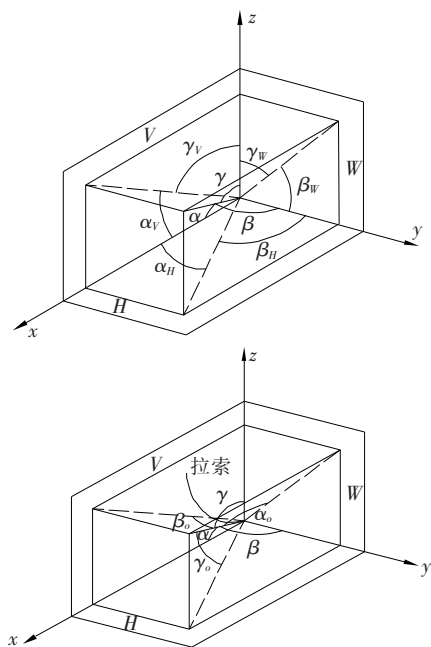


图3 拉索空间角度示意图

4 求解锚拉板安装角度

对于主梁采用锚拉板索梁锚固形式的情况,一般情况下,锚拉板上拉索锚固点相对主梁的高度 d 是固定值,但拉索所在平面内,锚拉板与水平方向的夹角并不明确,要使锚拉板安装角度与拉索在主梁锚点切线角度一致,可通过迭代求解,具体做法如下:

(1) 取锚拉板安装角度初值 η_0 为锚拉板轴线与主梁交点 C 和拉索在桥塔锚点 B 连线与水平面的夹角,该值也是合理范围内锚拉板安装角度所能取得的最大值。

(2) 通过 η_n, α_H, d , 即可求得拉索在锚拉板上的锚点 (x_n, y_n, z_n) , 结合拉索在塔端锚点 (x_t, y_t, z_t) , 可求得拉索在竖直和水平方向投影的初值 h_n 和 l_n , 将该值代入式(7)~(9), 采用改进的牛顿下山法迭代求解拉索的悬链线索形方程, 进而求得拉索在锚拉板处锚点的切线角度 θ_{ln} , 此时求得的 θ_{ln} 即是合理范围内拉索梁端最小的切线角。

(3) 比较 θ_{ln} 和 η_n , 如果 $|\theta_{ln} - \eta_n| < \epsilon$ (容许误差), 则取 η_n 为锚拉板的安装角度, 计算过程结束, 否则取 $\eta_{n+1} = \frac{\eta_n + \theta_{ln}}{2}$, 并将 η_{n+1} 作为新的 η_n 值重复步骤(2), 直到 $|\theta_{ln} - \eta_n| < \epsilon$, 则迭代结束, 此时的 η_n 即为所求的锚拉板安装切线角度 η 。

(4) 用步骤(3)中求得的 η 求解拉索在锚拉板上的锚点 (x_l, y_l, z_l) , 并基于该锚点求解拉索悬链线索

形方程, 进而求解拉索各相关参数。

计算流程如图4所示。

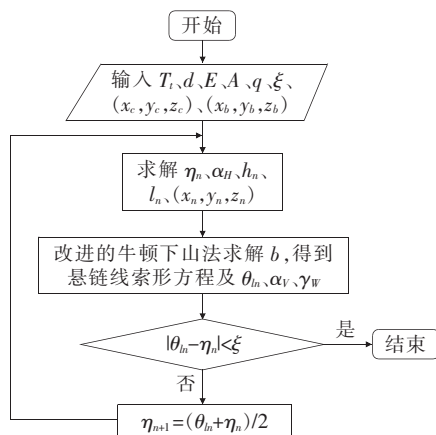


图4 计算流程图

5 工程算例

以湖北香溪河大桥为例, 运用该文提出的方法对该斜拉桥中跨组合梁斜拉索 EC01 和 EC17 进行计算分析。香溪河大桥为主跨 470 m 的双塔组合梁斜拉桥, 跨径布置为 $(48+48+78+470+78+48+48)$ m, 其中, 边跨 100.75 m 范围内为 Π 形混凝土边主梁, 其余为 Π 形工字钢组合梁, 索塔横桥向为钻石形, 全桥采用 17 对空间斜拉索, 拉索和组合梁之间采用锚拉板式索梁锚固形式, 斜拉索与主塔之间采用钢锚梁锚固形式, 桥型布置如图5所示。

坐标系以顺桥向中心线为 x 轴(里程增加方向为正向), 以竖直方向为 z 轴(向上为正向), 桥塔横桥向中心线为 y 轴(按右手螺旋法则确定正向)。拉索计算所用参数如表1所示, 其中拉索弹性模量取 1.95×10^5 MPa, 采用该文计算方法, 得到斜拉索各参数如表2、3所示。求解主梁—锚拉板交点坐标和拉索梁端锚点坐标所连直线的空间角度, 可知该锚拉板轴线倾角与拉索的梁端倾角是一致的, 这一点在实桥中也得以印证。

工程实践并不严格要求采用精确解, 但如果不知道精确解, 近似解的合理性及精度也就无从得知。实际应用中存在直接连接拉索的塔端锚点 B 、锚拉板轴线与主梁的交点 C (图1) 得到直线, 并基于该直线与 xy 平面的夹角计算锚拉板轴线角度, 进而求解拉索梁端锚点坐标和其他参数的做法。采用该近似法求得拉索梁端相关参数如表4所示。对比两种计算方法, 得到拉索梁端关键参数计算差值如表5所示。

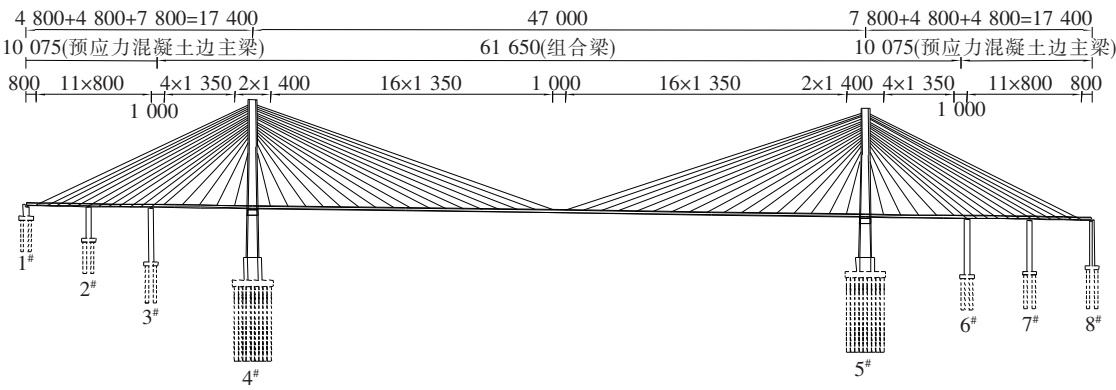


图 5 香溪河大桥桥型布置图 (单位:cm)

表 1 拉索参数

拉索 编号	塔端拉索锚点坐标			主梁与锚拉板交点坐标			拉索特性		塔端张拉 力/kN	d/ m
	x/m	y/m	z/m	x/m	y/m	z/m	面积/ m ²	重度/ (kN·m ⁻³)		
EC01	3 420.404	0.620	310.540	3 433.704	12.500	233.719	0.004	0.350	2 587.085	1.105
EC17	3 421.004	0.710	348.436	3 649.704	12.500	229.399	0.009	0.762	4 914.699	1.142

表 2 拉索空间角度

拉索 编号	梁端倾角	塔端倾角	拉索与 y 轴	梁端索与 x 轴	梁端索与 z 轴	塔端索与 x 轴	塔端索与 z 轴
	$\theta_l /$ (°)	$\theta_0 /$ (°)	夹角 $\beta /$ (°)	夹角 $\alpha_v /$ (°)	夹角 $\gamma_w /$ (°)	夹角 $\alpha_v /$ (°)	夹角 $\gamma_w /$ (°)
EC01	76.863	13.000	48.228	80.126	8.837	80.231	8.743
EC17	26.453	61.514	87.049	26.484	5.908	28.518	5.420

表 3 拉索无应力索长及锚点坐标

拉索 编号	无应力索长 S_0 / m	梁端坐标/m			塔端坐标/m		
		x	y	z	x	y	z
EC01	77.485	3 433.512	12.328	234.824	3 420.404	0.620	310.540
EC17	254.856	3 647.412	12.382	230.541	3 421.004	0.710	348.436

表 4 近似法计算结果

拉索 编号	梁端坐标/m			梁端倾角 $\theta_l / (^\circ)$
	x	y	z	
EC01	3 433.513	12.329	234.824	76.931
EC17	3 647.510	12.387	230.541	27.466

表 5 计算差值对比

拉索 编号	梁端坐标差值/m			梁端倾角 差值/(°)
	x	y	z	
EC01	0.001	0.001	0.00	0.068
EC17	0.098	0.005	0.00	1.012

由表 5 可知:对于短索,估算方法与精确解相对接近,但对于长索,估算方法误差较大,难以满足工程要求。

6 结论

- (1) 采用改进的牛顿下山法,建立内外双重循环迭代模型求解悬链线索形方程,得到锚拉板索梁锚固系统下斜拉索梁端锚点坐标及其他几何参数的精确解。
- (2) 通过对比发现,拉索较长的情况下,采用直线假定得到的近似解与精确解的差距较大。因此对于采