

# 钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化模型

刘芳平<sup>1,2</sup>, 易文韬<sup>2</sup>, 闫磊<sup>2</sup>

(1. 河西学院 土木工程学院, 甘肃 张掖 734000; 2. 重庆三峡学院 土木工程学院)

**摘要:**为了研究材料强度疲劳耗散下钢筋混凝土梁的承载力退化规律,建立钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化计算模型。首先,通过分析钢筋与混凝土疲劳剩余强度退化规律和边界条件,推导两种材料的疲劳剩余强度包络线方程,通过求解方程可以得到加载任意次数后材料的疲劳剩余强度,试验验证表明该文推导的计算公式与试验吻合,不但满足边界条件,也符合材料剩余强度退化规律;其次,基于推导的钢筋与混凝土材料疲劳剩余强度,将静载作用与疲劳作用时钢筋混凝土梁的抗弯极限承载力计算理论进行融合,提出钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化规律计算模型,并定义单一材料因素及两种材料综合影响下的承载力退化系数;最后,采用算例对该文提出的承载力退化计算模型进行了验证。结果表明:钢筋混凝土梁的抗弯极限承载力随着疲劳循环次数的增加而发生退化,疲劳开始时退化量相对较小,中间大部分时间都保持线性变化,到循环比超过0.8时退化急速增加;混凝土强度疲劳耗散对梁的整个承载力退化过程影响都较大,且混凝土强度越高时梁的承载力退化越慢,而钢筋强度的疲劳耗散对梁的承载力影响起初较小,仅当循环比超过0.6后迅速增大,且钢筋屈服强度差异对梁抗弯极限承载力退化影响不明显。

**关键词:**钢筋混凝土梁;包络线方程;疲劳承载力;承载力退化系数;材料剩余强度

钢筋混凝土梁在运营期间主要承受循环的汽车荷载作用,构成桥梁结构的钢筋与混凝土可能会在小于材料屈服(极限)强度的情况下产生疲劳破坏,有时尽

管没破坏,但终会因材料强度疲劳耗散使结构极限承载力下降,造成一定的安全隐患。因此,材料强度疲劳耗散下的结构承载力研究具有非常重要的意义。

(3) 无错位加载和错位加载工况下跨中弯矩随加载时间变化趋势基本一致,弯矩最大值出现时间前者较后者提前3 s;前者弯矩最大值大于后者,但差别很小,弯矩差别为2%~3%。

(4) 内力包络图可作为桥梁自行车移动活荷载设计标准值时参考。

## 参考文献:

- [1] 彭宏勤,张国伍. 绿色交通和城市的可持续发展——“交通7+1论坛”第五十次会议纪实[J]. 交通运输系统工程与信息,2018(2).
- [2] 刘涟涟,陆伟,蔡军. 基于绿色交通系统的德国城市环保交通管理策略[J]. 城市发展研究,2012(3).
- [3] Transport for London. Barclays Cycle Superhighways

- Routes and Maps [EB/OL]. 2011[2018-9-11]. <http://www.tfl.gov.uk/roadusers/cycling/11901.aspx>.
- [4] 冯建喜,马汀·戴斯特,扬·普瑞尔维茨. 荷兰自行车交通的历史演进及规划设计[J]. 国际城市规划,2013(3).
- [5] 魏勇,柯江华,韩巍,等. 活荷载不利布置对某大跨钢结构内力的影响分析[J]. 建筑结构,2011(s1).
- [6] 马虎迎,李全文,邓志刚,等. 工字梁桥活荷载剪力分布系数方程的验证[J]. 中外公路,2015(3).
- [7] 王赞芝,辛立凤,吴辉琴,等. 变截面连续箱梁活荷载内力增大系数计算[J]. 广西大学学报(自然科学版),2011(1).
- [8] 齐宏学,高小妮,贺拴海. 斜拉—自锚式悬索组合体系桥梁结构参数变化对活荷载效应影响[J]. 公路交通科技,2015(11).
- [9] JTG D60—2015 公路桥涵设计通用规范[S].
- [10] JTG B01—2014 公路工程设计标准[S].

收稿日期:2020-01-17

基金项目:重庆市自然科学基金资助项目(编号:cstc2018jcyjAX0360);重庆市教委科学技术研究项目(编号:KJQN201901207, KJQN201901219);中国博士后科学基金资助项目(编号:2019M663442)

作者简介:刘芳平,男,博士,副教授. E-mail:115090140@qq.com

在对类似于混凝土的复合材料剩余强度研究中,国内外许多学者都提出了不同的模型或表达式,但提出的这些剩余强度模型或表达式形式复杂、参数较多、试验验证较少、能确定模型参数的试验有效数据非常有限,导致剩余强度模型实际应用起来难度较大。对这些剩余强度的不同模型或表达式分析发现都符合其边界条件。在对受到疲劳荷载作用的钢筋混凝土结构中钢筋的剩余强度研究中普遍采用的是钢筋疲劳失效的“一元判据”,并得到了指数形式、对数形式、线性形式的退化模型,基于一元判据得到的这些退化模型描述钢筋疲劳破坏时是不足够精确的。以往主要依靠试验与数值模拟研究疲劳荷载作用下钢筋混凝土梁的剩余承载力。但试验研究需制作大批量试件,耗费大量人力、物力、财力,且易受试验本身条件的限制,得到数据也极其有限。已有的数值模拟方法理论复杂、无法有效模拟疲劳荷载作用下钢筋与混凝土的耗散。

该文从钢筋与混凝土强度退化过程出发,建立两种材料经历任意次数疲劳荷载作用后的剩余强度包络线方程,用其求解任意加载次数后的材料剩余强度;将静载作用下钢筋混凝土梁抗弯承载力计算理论和疲劳荷载作用下钢筋混凝土梁抗弯承载力计算假定融合,最终建立钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化计算模型,并通过算例进行验证,实现疲劳荷载作用下结构承载力退化规律的计算分析。

# 1 混凝土疲劳剩余强度计算

现有混凝土材料剩余强度计算式各有不同,但都基本满足如下边界条件:

- (1) 剩余强度初值为未受载时的强度,也就是  $\sigma_r(0) = \sigma_0$ , 其中:未受载强度  $\sigma_0$  取强度极限  $\sigma_b$ 。
- (2) 混凝土材料破坏时的剩余强度等于疲劳加载上限值,即  $\sigma_r(N_f) = \sigma_{\max}$ 。
- (3) 结构快要破坏时材料强度迅速降低,即混凝土强度发生“突然死亡”的表象,而且  $\frac{d\sigma_r(n)}{dn} \leq 0$ ,  $\frac{d^2\sigma_r(n)}{dn^2} < 0$ 。

基于以上分析,该文从混凝土强度退化过程分析入手,通过研究材料疲劳剩余强度包络线方程求解任意次数加载作用后混凝土的强度。

## 1.1 确定包络线曲线形状

文献[9]、[10]研究表明:混凝土疲劳破坏时的最

大应变与单轴静载下的最大应变相当,文献[11]验证了以上研究成果。仔细分析发现:混凝土在单轴静载下的应力—应变曲线软化段与疲劳荷载作用下的应力—应变滞回曲线十分接近,因此该文采用前者近似代表混凝土在疲劳荷载作用破坏时的剩余强度包络线(图 1),并将其最大应力对应的应变作为疲劳破坏依据。

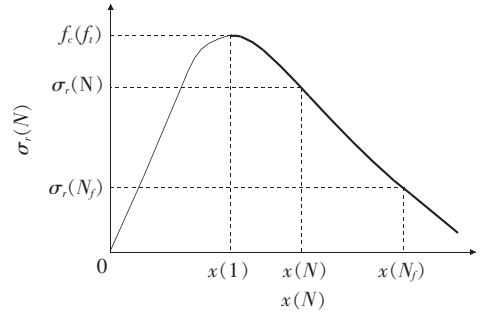


图 1 混凝土疲劳剩余强度包络线

## 1.2 疲劳剩余强度包络线方程

GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》中混凝土在单轴静载下的应力—应变曲线软化段方程如式(1)、(2)所示:

$$\frac{\sigma}{f_c} = \frac{\epsilon/\epsilon_c}{\alpha_c [\epsilon/\epsilon_c - 1]^2 + \epsilon/\epsilon_c} \quad (1)$$

$$\frac{\sigma}{f_t} = \frac{\epsilon/\epsilon_t}{\alpha_t [\epsilon/\epsilon_t - 1]^{1.7} + \epsilon/\epsilon_t} \quad (2)$$

式中:  $\epsilon > \epsilon_c, \epsilon > \epsilon_t$ ;  $\alpha_c$  为单轴受压应力—应变曲线软化段形状系数;  $\alpha_t$  为单轴受拉应力—应变曲线软化段形状系数;  $f_c, f_t$  分别为混凝土单轴抗压、抗拉强度;  $\epsilon_c, \epsilon_t$  分别为  $f_c, f_t$  对应的峰值压、拉应变。

参照单轴静载应力—应变曲线软化段方程(1)~(2)的求解方法和疲劳剩余强度包络线(图 1),得到混凝土疲劳剩余强度包络线方程如式(3)、(4)所示:

$$\frac{\sigma_{r,c}(N)}{f_c} = \frac{x(N)}{\alpha_c [x(N) - x(1)]^2 + x(N)}, x(N) \geq 1 \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_{r,t}(N)}{f_t} = \frac{x(N)}{\alpha_t [x(N) - x(1)]^{1.7} + x(N)}, x(N) \geq 1 \quad (4)$$

式中:  $\sigma_{r,c}(N)$  为混凝土受压疲劳破坏时的剩余强度,  $\sigma_{r,t}(N)$  为混凝土受拉疲劳破坏时的剩余强度;  $x(N)$  为与疲劳加载次数  $N$  有关的函数。

## 1.3 疲劳剩余强度求解

求解疲劳剩余强度包络线方程(3)、(4),得到任意次数加载后混凝土剩余强度为:

$$\sigma_r(N) = \begin{cases} f_c \frac{x(N)}{\alpha_c [x(N) - x(1)]^2 + x(N)} & x(N) \geq 1 \\ f_t \frac{x(N)}{\alpha_t [x(N) - x(1)]^{1.7} + x(N)} & x(N) \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

分析函数  $x(N)$  发现其符合以下两个边界条件:

(1)  $x|_{N=1} = x(1) = 1, \sigma_{r,c}(1) = f_c$ ; 即第一次加载时的应力为混凝土材料的轴心抗压强度。

(2)  $x|_{N=N_f} = x(N_f), \sigma_{r,c}(N_f) = \sigma_{\max}$ ; 即疲劳破坏时混凝土材料的抗压剩余强度退化为疲劳上限应力。

因此, 该文引入符合边界条件(1)和边界条件(2)的线性损伤函数  $x(N)$  如下:

$$x(N) = \begin{cases} 1 & N=1 \\ x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)] & 1 < N < N_f \\ x(N_f) & N=N_f \end{cases} \quad (6)$$

将受压疲劳边界条件代入混凝土受压疲劳剩余强度包络线方程(3), 整理可得受压疲劳时  $x(N_f)$  方

程为:

$$\sigma_{\max} \alpha_c [x(N_f)]^2 + (\sigma_{\max} - f_c - 2\sigma_{\max} \alpha_c) \cdot [x(N_f)] + \sigma_{\max} \alpha_c = 0 \quad (7)$$

求解方程(7)得到混凝土受压时  $x(N_f)$  为:

$$x(N_f) = \frac{f_c + 2\sigma_{\max} \alpha_c - \sigma_{\max} \pm \sqrt{(\sigma_{\max} - f_c)^2 + 4\alpha_c \sigma_{\max} (f_c - \sigma_{\max})}}{2\sigma_{\max} \alpha_c} \quad (8)$$

同理, 根据受拉疲劳边界条件与混凝土受拉疲劳剩余强度包络线方程(4), 可得受拉疲劳时  $x(N_f)$  方程为:

$$\sigma_{\max} \alpha_t [x(N_f) - x(1)]^{1.7} + (\sigma_{\max} - f_t) x(N_f) = 0 \quad (9)$$

求解方程(9)可得到混凝土受拉时  $x(N_f)$ 。

参数  $\alpha_c, \alpha_t$  按单轴受压(拉)应力—应变曲线软化段形状系数取值。

综上所述, 将式(6)所示的线性损伤函数  $x(N)$  代入式(5), 最终得到经历任意次数疲劳荷载后混凝土剩余强度为:

$$\sigma_r(N) = \begin{cases} f_c & N=1 \\ \sigma_{r,c}(N) = \begin{cases} f_c \frac{x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]}{\alpha_c \left[ \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)] \right]^2 + x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]} & 1 < N < N_f \\ \sigma_{\max} & N=N_f \end{cases} \\ f_t & N=1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\sigma_{r,t}(N) = \begin{cases} f_t \frac{x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]}{\alpha_t \left[ \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)] \right]^{1.7} + x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]} & 1 < N < N_f \\ \sigma_{\max} & N=N_f \end{cases}$$

#### 1.4 混凝土疲劳剩余强度验证

该文用文献[8]试验数据对混凝土疲劳剩余强度公式(10)进行了验证。文献[8]中共 14 组试件, 7 组用来做抗压, 另外 7 组用来做抗拉, 混凝土强度 C30, 试验情况与试验结果如表 1 所示。

用式(8)计算在  $0.75f_c = 18.35$  MPa 与  $0.85f_c = 20.80$  MPa 下的  $x(N_f)$  的值分别为 1.632 7、1.436 6。抗压强度初始值  $\sigma_0$  取表 1 中试验平均值 24.47 MPa,  $\alpha_c$  参照规范表 C.2.4 取 1.36, 计算得的剩余强度衰减规律见图 2。

用式(9)计算在  $0.75f_t = 2.02$  MPa 与  $0.85f_t =$

2.29 MPa 下的  $x(N_f)$  的值分别为 1.274 8、1.220 8 MPa。抗拉强度初始值  $\sigma_0$  取表 1 中试验平均值 2.692 MPa,  $\alpha_t$  参照 GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》表 C.2.3 取 2.81, 计算得的剩余强度衰减规律如图 3 所示。

从图 2 得到: 循环开始, 混凝土抗压强度为初始强度 24.47 MPa, 疲劳破坏时剩余强度 20.799 5 MPa [图 2(a)]、18.352 5 MPa [图 2(b)], 都为疲劳荷载上限应力。从图 3 得到: 循环开始, 混凝土抗拉强度为初始强度 2.692 MPa, 疲劳破坏时剩余强度为 2.019 MPa [图 3(a)]、2.282 2 MPa [图 3(b)], 也都为疲劳荷

表1 混凝土疲劳剩余强度试验结果

组别	测试内容	单位	测试条件	抗压强度或 疲劳寿命	抗拉强度或 疲劳寿命
1组	初始强度	MPa		24.47	2.692
2组	疲劳寿命	次	$\sigma_{\max}=0.75f_c$ (抗压), $\sigma_{\max}=0.75f_t$ (抗拉)	22 034	19 390
3组	剩余强度	MPa	疲劳 10 000 次 (抗压), 疲劳 10 000 次 (抗拉)	23.62	2.564
4组	剩余强度	MPa	疲劳 20 000 次 (抗压), 疲劳 15 000 次 (抗拉)	22.77	2.474
5组	疲劳寿命	次	$\sigma_{\max}=0.85f_c$ (抗压), $\sigma_{\max}=0.85f_t$ (抗拉)	1 660	2 903
6组	剩余强度	MPa	疲劳 500 次 (抗压), 疲劳 1 000 次 (抗拉)	23.48	2.621
7组	剩余强度		疲劳 1 000 次 (抗压), 疲劳 2 000 次 (抗拉)	22.89	2.503

注: ① 试验数据来自孟宪宏(文献[7]、[8]), 为各组试件平均值; ② 第3、4组最大应力水平为  $\sigma_{\max}=0.75f_c$  或者  $\sigma_{\max}=0.75f_t$ , 第6、7组最大应力水平为  $\sigma_{\max}=0.85f_c$  或者  $\sigma_{\max}=0.85f_t$ 。

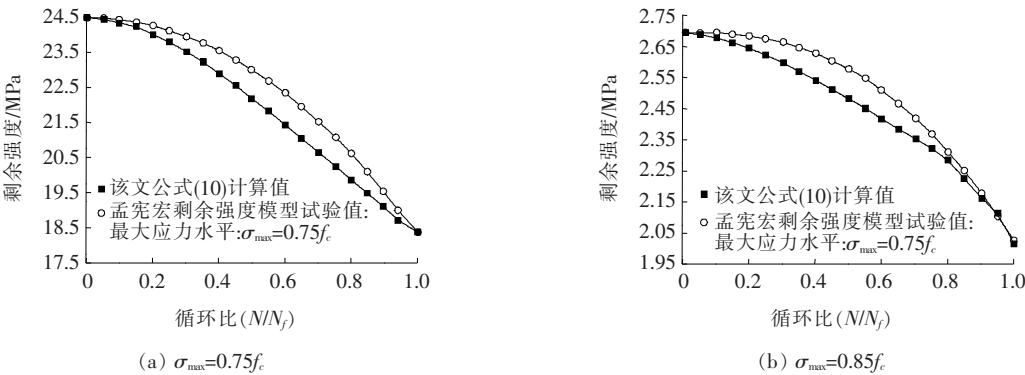


图2 混凝土抗压疲劳剩余强度衰减规律

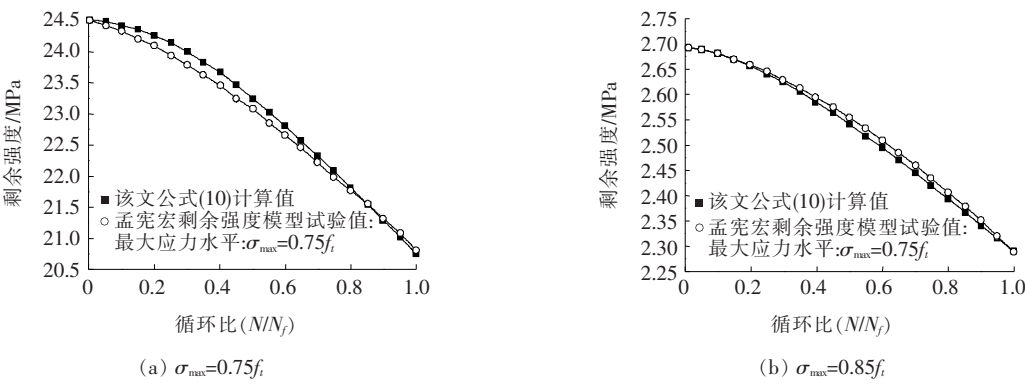


图3 混凝土抗拉疲劳剩余强度衰减规律

载上限应力。计算与试验吻合,不但满足边界条件,也符合混凝土剩余强度退化规律。

为了进一步比较结算结果与试验结果,验证以上提出的方法,该文将试验中测得的疲劳剩余强度和该文方法计算值进行了比较,结果如表2所示。从表2可以看出计算值与试验值(各组构件平均值)非常接近。

2 钢筋疲劳剩余强度计算

2.1 钢筋疲劳剩余强度推导

在推导钢筋的疲劳剩余强度及包络线方程过程中,运用了钢筋疲劳破坏的“二元判据”和其有效截面非线性缩减的假定:



表 2 混凝土疲劳剩余强度计算值与试验值对比

静载强		不同疲劳次数(次)时的疲劳剩余强度/MPa								
度(抗压)/MPa	应力水平(疲劳寿命/次)	10 000		20 000		应力水平(疲劳寿命/次)	500		1 000	
		计算值	试验值	计算值	试验值		计算值	试验值	计算值	试验值
24.47	0.75 $f_c$ (22 034)	22.06	23.62	19.04	22.77	0.85 $f_c$ (1 660)	23.97	23.48	22.77	22.89

静载强		不同疲劳次数(次)时的疲劳剩余强度/MPa								
度(抗拉)/MPa	应力水平(疲劳寿命/次)	10 000		15 000		应力水平(疲劳寿命/次)	1 000		2 000	
		计算值	试验值	计算值	试验值		计算值	试验值	计算值	试验值
2.692	0.75 $f_t$ (19 390)	2.47	2.56	2.30	2.47	0.85 $f_t$ (2 903)	2.61	2.62	2.45	2.50

注:试验数据来自孟宪宏(文献[8])。

(1) 因为受疲劳荷载作用时,钢筋变形绝大部分是弹性变形,所以假定其弹性模量在整个疲劳过程中不变化。

(2) 假定受疲劳荷载作用后,钢筋的有效截面积非线性缩减。

(3) 在疲劳过程中,钢筋静拉伸强度不断衰减,当剩余强度下降到疲劳上限应力时发生静载瞬断的破坏,其失效符合“二元判据”,破坏准则为:

$$S \leq \sigma_{\max} = \sigma_{\min} + \Delta\sigma \quad (11)$$

式中: $\sigma_{\max}$  为当前应力最大值; $S$  为计算得到的钢筋剩余屈服强度或剩余极限强度。

“二元判据”[式(11)]指明:钢筋疲劳破坏由钢筋当前应力和损伤共同确定,应力确定时损伤决定钢筋是否破坏,反之损伤确定时应力决定钢筋是否破坏。

该文基于上述 3 点假设,推导了钢筋在疲劳荷载作用下的剩余强度包络线方程,并获得了其经历任意次数疲劳加载后的剩余强度。推导如下:

如果钢筋屈服强度为  $f_y$  (或极限强度  $f_b$  ),疲劳加载前的截面面积为  $A_s$  ,疲劳破坏时的有效截面面积为  $A_s^f(N_f)$  ,依照该文推导假定(1)疲劳过程中钢筋的应变等效,可得疲劳破坏时有效截面面积为:

$$A_s^f(N_f) = \frac{\sigma_{\max}(N_f) \cdot A_s}{f_y} \quad (12)$$

经  $N_f$  次等幅疲劳荷载作用,面积减少如下:

$$A_j(N_f) = \left[ 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right] \cdot A_s \quad (13)$$

在疲劳过程中假设钢筋截面面积以非线性函数  $f(N/N_f)$  所示规律进行退化,对函数  $f(N/N_f)$  分析后发现有以下特点:

(1) 当  $N=0$  时,  $f(N/N_f)=0$  ;即施加疲劳荷载之前,钢筋截面面积等于初始值  $A=A_s$  。

(2) 当  $N=N_f$  时,  $f(N/N_f)=1$  ;即经历  $N_f$  次

疲劳作用,钢筋有效截面面积  $A=A_s^f(N_f)$  。

(3)  $f(N/N_f)$  为单调减函数,值域在  $0 \sim 1$  之间,即  $0 \leq f(N/N_f) \leq 1$  。

参照文献[13]的成果,  $f(N/N_f)$  可取  $f(N/N_f) = (N/N_f)^c$  ,  $c$  为钢筋材料的常数;则经历  $N$  次疲劳荷载,钢筋截面面积变为:

$$A(N) = A_s - [A_s - A_s^f(N_f)] f\left(\frac{N}{N_f}\right) = A_s \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \right] \quad (14)$$

经历  $N$  次疲劳加载,钢筋损伤为:

$$D(N) = 1 - \frac{A(N)}{A_s} = \left[ 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right] \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \quad (15)$$

由钢筋强度定义的损伤为:

$$D(N) = \frac{f_y - f_y(N)}{f_y} \quad (16)$$

由式(16)得到:

$$f_y(N) = f_y - D(N) \cdot f_y \quad (17)$$

钢筋截面面积的损伤和强度损伤一致,将式(15)代入式(17)后得到:

$$f_y(N) = f_y \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right] \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \right\} \quad (18)$$

式(18)即为求解钢筋剩余强度的方程。从式(18)可得,只需知道疲劳寿命  $N_f$  及当前钢筋应力最大值  $\sigma_{\max}$  就可得到疲劳荷载作用  $N$  次后的剩余强度。 $\sigma_{\max}(N_f) = \sigma_{\min} + \Delta\sigma$  ,依据钢筋强度退化表达式(18)可得疲劳荷载作用下钢筋剩余强度包络线方程为:

$$f_y(N) = f_y \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma_{\min} + \Delta\sigma}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \right] \quad (19)$$

## 2.2 钢筋疲劳剩余强度验证

为了验证该文提出的方法,采用文献[14]试验进

行了验证,并与李莉指数退化模型、苏志霄对数退化模型、谢里阳线性退化模型等已有常见模型进行了对比分析。试验采用 35CrMo 圆柱形钢,应力比  $R = -1$ , 应力幅值  $\sigma_a = 367$  MPa, 频率 184 Hz, 得到平均寿命  $N_f = 1\,151 \times 10^3$  次, 抗拉极限强度  $\sigma_b = 1\,000$  MPa, 屈服强度  $f_y = 780$  MPa。还测得循环比为 0.5、0.7 与 0.8 时的钢筋剩余抗拉强度分别为 979.33、965.85、940.07 MPa。该文模型中  $c$  值参考 Schaff J (文献[17])研究成果取 10.506。

该文方法得到的抗拉极限强度与屈服强度退化规律与其他模型规律如图 4、5, 其中  $\Delta\sigma = 367$  MPa, 疲劳寿命为  $1\,151 \times 10^3$  次。

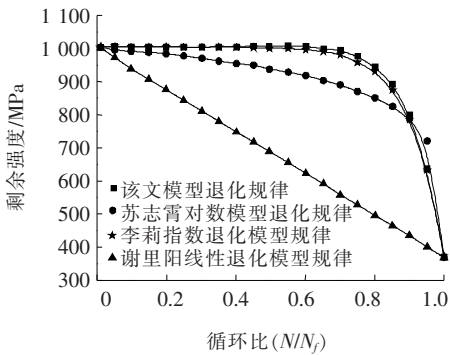


图 4 钢筋疲劳抗拉极限剩余强度退化规律图

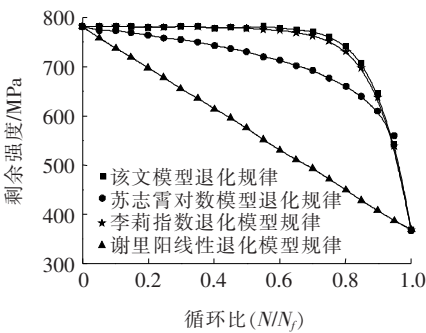


图 5 钢筋疲劳抗拉屈服剩余强度退化规律

从图 4、5 得到: 疲劳开始钢筋强度为 1 000 MPa (或者 780 MPa), 即试验抗拉极限强度(或屈服强度), 当疲劳破坏时, 剩余强度为 367 MPa, 即最大循环应力(该文加载应力幅值)。说明该文方法也符合边界条件。比较各个模型看出: 苏志霄模型只符合破坏“一元判据”, 并且退化规律与实际也相差较大。谢里阳模型结果最为保守, 可看做是对各非线性的近似处理。该文提出的模型计算分析结果与李莉模型计算分析结果最为相近, 既符合“二元判据”, 又比较接近实际衰退规律。

将循环比为 0.5、0.7、0.8 的剩余强度试验数据与各模型计算分析值进行比较, 如表 3 所示。从表 3 看出: 该文模型计算结果比较接近试验值。

表 3 钢筋疲劳剩余强度计算值与试验值对比

静载强度(抗拉强度)/MPa	循环比	试验值/MPa	$f_y \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right] \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \right\}$ (该文模型值)/MPa	$S_0 \left\{ 1 + \left[ \ln \left( 1 - \frac{N}{N_f + 1} \right) / \ln(N_f + 1) \right] \right\}$ (苏志霄模型值)/MPa	$\sigma_b + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_b}{1 - a} \left( 1 - a^{\frac{N}{N_f}} \right)$ (李莉模型值)/MPa	$S_0 - (S_0 - \sigma_{\max}) \frac{N}{N_f - 1}$ (谢里阳模型值)/MPa
1 000	0.5	979.33	999.56	933.73	996.89	683.50
	0.7	965.85	985.07	884.89	973.88	556.90
	0.8	940.07	939.29	846.13	924.40	493.60

注: 试验数据来自李莉(文献[14])。

### 3 钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化计算模型

#### 3.1 承载力退化计算模型

GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》进行钢筋混凝土梁正截面抗弯承载力计算时做了如下假定: (a) 截面应变应该保持平面; (b) 不考虑混凝土的抗拉强度; (c) 将截面混凝土应力等效简化为矩形。基于上

述假定, 按照下式进行静载作用下钢筋混凝土梁抗弯承载力计算:

$$\xi = \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \tag{20a}$$

$$M_u = T_u h_0 (1 - 0.5 \xi) \tag{20b}$$

式(20)中:  $M_u$  为钢筋混凝土梁抗弯承载力;  $\xi$  为相对受压区高度;  $T_u$  为纵筋的合力,  $T_u = 0.25 \pi \sum d_i^2 \cdot f_y$ , 其中  $d_i$  为编号为  $i$  的钢筋直径;  $f_y$  为纵向受拉钢筋屈服强度;  $\alpha_1$  为截面矩形应力图代表应力与混凝土

抗压强度比值;  $b, h_0$  为混凝土截面宽度、有效高度;  $f_c$  为混凝土轴心抗压强度。

基于静载下的抗弯承载力计算基本假定(a)、(b), 该文在进行钢筋混凝土梁疲劳抗弯承载力计算时还做了以下假定:

① 截面受压混凝土的应力呈三角形。

② 混凝土与钢筋的疲劳剩余强度按照该文推导公式(10)与(18)进行衰减。

③ 钢筋混凝土梁截面混凝土的受压区高度  $\xi =$

$\frac{\pi}{4} \sum d_i^2 \cdot f_y / (\alpha_1 f_c b h_0)$  随材料强度的退化而变化。

因此, 按照该文计算假定(a)、(b)、①、②、③, 疲劳荷载作用下的混凝土剩余强度计算表达式(10), 疲劳荷载作用下的钢筋剩余强度计算表达式(20), 可得到疲劳荷载作用下钢筋混凝土梁的抗弯承载力计算模型如下:

$$\xi = \frac{T'_u}{\alpha'_1 f'_c b h_0} \quad (21a)$$

$$M' = T'_u h_0 (1 - 0.5 \xi) \quad (21b)$$

式中:  $\alpha'_1$  为截面三角形应力图代表的应力与剩余强度比值;  $T'_u$  为纵向受拉钢筋的合力,  $T'_u = \frac{\pi}{4} \sum d_i^2 \cdot f_y \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{\sigma_{\max}(N_f)}{f_y} \right] \cdot \left( \frac{N}{N_f} \right)^c \right\}$ ;  $f'_c$  为混凝土剩余抗压强度,  $f'_c = f_c$ 。

$$\frac{x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]}{\alpha'_1 \left\{ \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)] \right\}^2 + x(1) + \frac{N}{N_f} [x(N_f) - x(1)]}。$$

式(21)即为钢筋混凝土梁基于钢筋与混凝土材料强度疲劳耗散的承载力退化计算模型。

### 3.2 承载力退化系数

受到疲劳荷载作用结构承载力下降的本质是材料强度的耗散衰减。如果仅考虑混凝土强度疲劳耗散, 梁的抗弯承载力退化系数  $\lambda_1$  可按下式计算:

$$\lambda_1 = \frac{M_u - M'_{u1}}{M_u} \quad (22)$$

式中:  $M'_{u1}$  为仅考虑混凝土强度下降的抗弯承载力;  $M_u$  为梁的静载抗弯极限承载力。

综合式(10)、(20)与(21),  $\lambda_1$  可写成:

$$\lambda_1 = \frac{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right) - T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha'_1 f'_c b h_0} \right)}{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right)} \quad (23)$$

$$\text{即: } \lambda_1 = \left( \frac{\alpha_1 f_c}{\alpha'_1 f'_c} - 1 \right) / \left( 2 b h_0 \alpha_1 \frac{f_c}{T_u} - 1 \right) \quad (24)$$

如果仅考虑钢筋强度疲劳耗散, 梁的抗弯承载力退化系数  $\lambda_2$  可如下计算:

$$\lambda_2 = \frac{M_u - M'_{u2}}{M_u} \quad (25)$$

式中:  $M'_{u2}$  为仅考虑钢筋强度下降的抗弯承载力。

综合式(18)、(20)与(21),  $\lambda_2$  可写成:

$$\lambda_2 = \frac{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right) - T'_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T'_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right)}{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right)} \quad (26)$$

$$\text{即: } \lambda_2 = \frac{2 \alpha_1 f_c b h_0 \left( 1 - \frac{T'_u}{T_u} \right) + \left( \frac{T'^u_{u2}}{T_u} - T_u \right)}{2 \alpha_1 f_c b h_0 - T_u} \quad (27)$$

当同时考虑钢筋与混凝土材料强度的疲劳耗散下降, 梁的抗弯承载力退化系数  $\lambda$  可如下计算:

$$\lambda = \frac{M_u - M'_u}{M_u} \quad (28)$$

式中:  $M'_u$  为同时考虑钢筋与混凝土材料强度下降的抗弯极限承载能力。

综合式(10)、(18)、(20)与(21),  $\lambda$  可写成:

$$\lambda = \frac{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right) - T'_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T'_u}{\alpha'_1 f'_c b h_0} \right)}{T_u h_0 \left( 1 - 0.5 \frac{T_u}{\alpha_1 f_c b h_0} \right)} \quad (29)$$

即:  $\lambda =$

$$\frac{(2 \alpha_1 f_c b h_0 - T_u) - \frac{T'_u}{T_u} \cdot \left( 2 \alpha_1 f_c b h_0 - T'_u \cdot \frac{\alpha_1 f_c}{\alpha'_1 f'_c} \right)}{(2 \alpha_1 f_c b h_0 - T_u)} \quad (30)$$

## 4 算例分析

算例采用钟铭试验数据与成果, 用该文所推导的方法从材料强度疲劳耗散下降的角度对疲劳荷载作用下钢筋混凝土梁的承载力退化情况进行分析。其试验有 13 根梁, 其中 9 根为高强度梁, 4 根为普通强度梁, 尺寸为  $b \times h = 184 \text{ mm} \times 214 \text{ mm}$ , 两种情况下的材料参数如下:

① 混凝土 C40,  $f_c = 36.8$  MPa, 纵筋直径  $d = 12$  mm、Ⅱ级钢筋, 纵筋屈服强度  $f_y = 445$  MPa。

② 混凝土 C70,  $f_c = 60.2$  MPa, 纵筋直径  $d = 12$  mm、新Ⅲ级钢筋, 纵筋屈服强度  $f_y = 660$  MPa。

①、②两种情况下混凝土保护层厚度均为  $c = 30$  mm, 疲劳试验的最大荷载水平  $S_{\max} = M_{\max}/M_u = 0.4$ 。试验应力幅度  $\sigma_r = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 169.82$  MPa。由式(7)计算混凝土强度在  $f_c = 36.8$  MPa 与  $f_c = 60.2$  MPa 且在该文最大应力水平下的  $x(N_f)$  值分别为 2.35、2.05 MPa。强度为 C40 混凝土的系数  $\alpha_c$  按照文献[12]中附录表 C.2.4 为 1.94, 同理查表得到强度为 C70 混凝土的系数  $\alpha_c$  为 3.50。

按照文献[12]6.2.6节的规定, 混凝土强度在  $f_c = 36.8$  MPa 时  $\alpha_1 = 1$ 。  $f_c = 60.2$  MPa, 根据线性插值得  $\alpha_1 = 0.96$ , 两种情况下可近似取  $\alpha'_1 = \alpha_1$ 。

当同时考虑两种材料强度的疲劳耗散下降, 经过计算得到的钢筋混凝土梁抗弯极限承载力绝对量的衰减如图 6 所示。

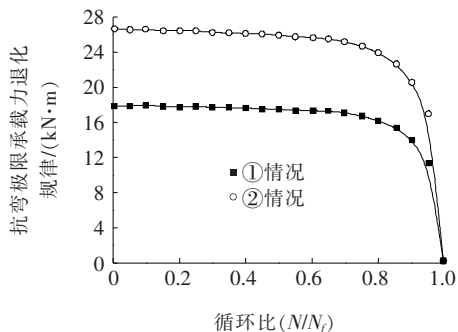


图6 抗弯极限承载力绝对量的退化情况

图6表明: 高强度混凝土梁的抗弯极限承载力要比普通混凝土梁的抗弯极限承载力大很多。两种梁的抗弯极限承载力随着疲劳循环次数的增加而发生退化, 疲劳开始时退化量相对较小, 中间大部分时间都保持线性变化, 到循环比超过 0.8 时退化急速增加, 在这个过程中两种梁的退化规律一致。

如果不考虑钢筋强度的疲劳耗散, 其强度都取为①的情况, 即  $f_y = 445$  MPa, 只考虑混凝土材料强度的耗散, 对混凝土强度在 C40 与 C70 两种情况下的钢筋混凝土梁抗弯极限承载力进行计算, 其退化系数  $\lambda_1$  变化如图 7 所示。

图7表明: 不考虑钢筋, 只考虑混凝土材料强度的疲劳耗散, 钢筋混凝土梁在两种情况下的退化系数  $\lambda_1$  随循环次数增加都在增大, 说明抗弯极限承载力都在

下降, 并且从计算结果可以看出高强混凝土梁的退化系数相比普通混凝土梁的退化系数增长慢, 说明高强混凝土梁的抗弯极限承载力在疲劳过程中退化慢。

如果不考虑混凝土强度的疲劳耗散, 其强度都取为①情况, 即  $f_c = 36.8$  MPa, 只考虑钢筋材料强度的耗散, 对钢筋强度在  $f_y = 445$  MPa 与  $f_y = 660$  MPa 两种情况下的钢筋混凝土梁抗弯极限承载力进行计算, 退化系数  $\lambda_2$  变化如图 8 所示。

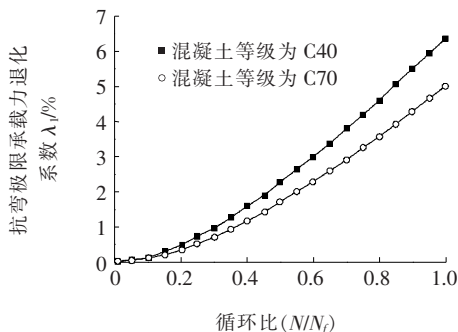


图7 退化系数  $\lambda_1$  变化规律

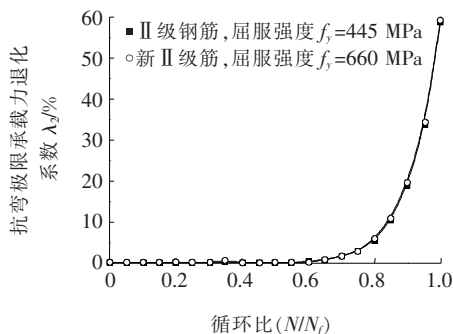


图8 退化系数  $\lambda_2$  变化规律

图8表明: 不考虑混凝土, 只考虑钢筋材料强度的疲劳耗散, 钢筋混凝土梁的抗弯极限承载力退化系数  $\lambda_2$  起初变化较小, 当循环比超过 0.6 以后迅速增大。说明钢筋强度的疲劳耗散对梁抗弯极限承载力的影响起初较小, 但疲劳后期较大, 并且钢筋屈服强度差异对梁抗弯极限承载力退化影响不明显。

如果综合考虑两种材料的疲劳耗散, 对①、②两种情况下的钢筋混凝土梁抗弯极限承载力进行计算, 其退化系数  $\lambda$  变化如图 9 所示。

图9表明: 同时考虑两种材料疲劳耗散以后, 梁的抗弯极限承载力系数  $\lambda$  先是较为缓慢地线性上升, 循环比超过 0.8 以后迅速上升, 说明梁的抗弯极限承载力先是较为缓慢的线性下降, 接近破坏时再迅速下降, 与图 6 得到的承载力绝对退化量一致。



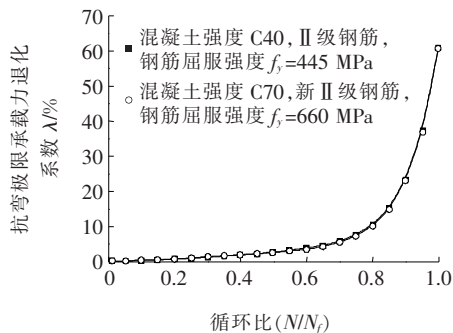


图 9 退化系数  $\lambda$  变化规律

## 5 结论

(1) 通过分析混凝土材料疲劳剩余强度退化规律和边界条件,将混凝土在单轴静载下应力—应变模型软化段曲线作为疲劳荷载作用下材料破坏时的剩余强度包络线,推导任意次数疲劳加载后的剩余强度包络线方程,通过求解此方程可以得到加载任意次数后的混凝土疲劳剩余强度。试验验证分析结果表明该公式计算值与试验值吻合,不但满足边界条件,也符合混凝土剩余强度退化规律。由钢筋与混凝土两种材料组成的各类构件,在其疲劳荷载作用下的损伤、刚度、强度及承载力计算中,可用该文提出的混凝土疲劳剩余强度公式。

(2) 通过分析疲劳荷载作用下钢筋混凝土梁内钢筋剩余强度退化规律和边界条件,基于钢筋弹性模量不变、有效截面积非线性缩减、疲劳失效的“二元判据”等假定推导了钢筋在疲劳荷载作用下的剩余强度包络线方程,并获得其经历任意次数疲劳加载后的剩余强度。试验验证分析结果表明该文提出的模型计算分析结果既符合“二元判据”,又比较接近实际衰退规律。

(3) 基于推导的钢筋与混凝土材料的疲劳剩余强度,该文将静载与疲劳荷载作用时钢筋混凝土梁的抗弯极限承载力计算理论进行融合,提出钢筋混凝土梁基于材料强度疲劳耗散的承载力退化规律模型,并定义单一材料因素及两种材料综合影响下的承载力退化系数,并用算例进行验证。

## 参考文献:

[1] Broutman L J and Sahu S. A New Theory to Predict Cumulative Fatigue Damage in Fiber—Glass Reinforced

Plastics[C]. Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP497, 1972: 170—188.

[2] Yang J N and Jones D L. Load Sequence on the Fatigue of Unnotched Composite Material[J]. ASTM STP, 1981, 723: 213—232.

[3] Hashin Z. Cumulative Damage Theory for Composite Materials: Residual Life and Residual Strength Methods [J]. Composites Science and Technology, 1985, 23(1): 1—19.

[4] Hahn T. Fatigue Behavior and Life Prediction of Composite Laminates[M]. 1978.

[5] Chou P C and Croman R. Residual Strength in Fatigue Based on the Strength—Life Equal Rank Assumption[J]. Journal of Composite Materials, 1978, 12(3): 177—194.

[6] Chou P C and Croman R. Degradation and Sudden—Death Model of Fatigue of Graphite/Epoxy Composites [C]. Composite Materials: Testing and Design (Fifth Conference), ASTM STP674, 1979: 431—454.

[7] 孟宪宏, 宋玉普. 混凝土抗压疲劳剩余强度损伤模型[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2009(1).

[8] 孟宪宏. 混凝土疲劳剩余强度试验及理论研究[D]. 大连理工大学博士学位论文, 2006.

[9] KIM Jin—Keun, KIM Yun—Yong. Experimental Study of the Fatigue of High Strength Concrete[J]. Cement and Concrete Research, 1996, 26(10): 1 513—1 523.

[10] GYLLTOFT K. Fracture Mechanics Models for Fatigue in Concrete Structures[D]. University of Technology, 1983.

[11] 朱劲松, 肖汝诚, 宋玉普. 混凝土疲劳特性与疲劳损伤后的等效单轴本构关系[J]. 建筑材料学报, 2005(5).

[12] GB 50010—2010 混凝土结构设计规范[S].

[13] 叶笃毅, 等. 一种基于材料韧性耗散分析的疲劳损伤定量新方法[J]. 实验力学, 1999(1).

[14] 李莉, 谢里阳, 何雪宏, 等. 疲劳加载下金属材料的强度退化规律[J]. 机械强度, 2010(6).

[15] 苏志霄, 刘宏昭, 王建平, 等. 基于剩余强度退化规律的疲劳损伤非线性演化模型[J]. 机械强度, 2000(3).

[16] 谢里阳, 林文强. 线性累积损伤的概率准则[J]. 机械强度, 1993(3).

[17] Schaff J R and Davidson B D. Life Prediction Methodology for Composite Structures: Part 1—Constant Amplitude and Two—Stress Level Fatigue[J]. Journal of Composite Materials, 1997, 31(2): 128—157.

[18] 钟铭, 王海龙, 刘仲波. 高强钢筋高强混凝土梁静力和疲劳性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2005(2).