

基于概率跳跃粒子群算法的钢桁拱桥结构线形优化

康俊涛, 刘开, 张亚州

(武汉理工大学 土木工程与建筑学院, 湖北 武汉 430070)

摘要:钢桁拱桥的拱肋线形对结构的应力分布起关键作用,为了使钢桁拱桥的受力更加均匀,选取钢桁拱的线形影响变量,同时将结构应变能作为目标函数,采用智能优化算法寻找最优拱肋线形。为了避免寻找到局部最优解,提出了概率跳跃因子,同时根据粒子的聚集度和进化速度来确定粒子跳跃的时机。最后分别采用数值算例和工程案例验证了所提算法的寻优精度和寻优效率。结果表明:所提算法能有效改善标准粒子群陷入局部最优的现象,经过修正后,结构的应变能有明显下降,结构受力更加合理。

关键词:桥梁工程; 刚桁拱桥; 结构优化; 粒子群算法; 随机跳跃

钢桁拱桥拱肋的线形是拱桥概念设计的重要参数,它直接影响了整个桥梁的受力性能、应力分布、整桥重量。目前确定拱轴线形的方法多是通过荷载产生的压力线来确定,即设计线形,使得拱上只承受压力,不承受弯矩,由于实际结构承受的荷载复杂,理想的拱轴线是无法得到的,因此,现在常用的方法多为“五点重合法”,即拱肋上几个关键点的压力线与拱轴线相重合。首先只采用5个关键点对结构线形控制不能保证

选择的线形为最优方案,即使增加关键点数,采用“多点重合法”,也无法解决有限点数带来的误差,且增加了计算的复杂度,使得问题更加难以采用理论解法给出最优方案;其次,现有拱肋线形的确定具有一定的经验成分,如抛物线次数、圆曲线半径等控制因素多为离散经验值,无法对所有解空间进行全部的探索,从而导致可能遗漏最优方案现象的发生。

近年来,越来越多的学者将智能优化算法应用于

(3) 随着主缆抗拉刚度的增加,主梁跨中挠度、主塔水平位移、主梁弯矩均呈下降趋势;而主缆恒载轴力以及主缆恒活载轴力均在增大。

(4) 该文所得到的影响规律与现有研究结果基本一致,但跨中挠度有所减小。在垂跨比为1/7、边中跨比为0.4以及现有主缆抗拉刚度的条件下,主梁挠度、主缆轴力、主塔水平位移、主梁恒活载轴力以及主梁弯矩均符合规范要求,说明设计是合理的。

参考文献:

[1] 肖汝成,等. 桥梁结构体系[M]. 北京:人民交通出版社, 2013.
[2] 胡建华,沈锐利,张贵明,等. 佛山平胜大桥全桥模型试验研究[J]. 土木工程学报, 2007(5).
[3] D Cobo del Arco, A C Aparicio. Preliminary Static Analysis of Suspension Bridges [J]. Engineering Structures,

2001(23):1 096-1 103.
[4] 江南,沈锐利. 矢跨比对悬索桥结构刚度的影响[J]. 土木工程学报, 2013(7).
[5] 陈淮,王艳,朱倩. 设计参数对刚性索自锚式悬索桥受力性能的影响分析[J]. 铁道科学与工程学报, 2016(13).
[6] 罗世东,夏正春,严爱国. 超大跨度公铁悬索桥结构体系参数分析[J]. 铁道工程学报, 2014(6).
[7] 孙永明,张连振,李忠龙. 自锚式悬索桥吊索目标索力影响参数分析[J]. 桥梁建设, 2015(4).
[8] 贾丽君. 大跨度悬索桥体系及其性能研究[D]. 同济大学博士学位论文, 2009.
[9] 邹存俊. 自锚式悬索-斜拉组合结构体系桥梁静力学性能与施工关键技术研究[D]. 长安大学博士学位论文, 2009.
[10] 康俊涛,胡杰,董培东,等. 三塔自锚式悬索桥动力特性参数影响分析[J]. 武汉理工大学学报, 2017(4).

收稿日期:2020-03-28(修改稿)

基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号:51608408);湖北省自然科学基金资助项目(编号:2015CFB393)

作者简介:康俊涛,男,博士,教授. E-mail:jtkang@163.com

土木工程领域,如结构优化(索力值、拱轴线形等)、结构损伤识别等。相比于传统算法,智能算法具有计算速度快,且对经验知识要求少的特点。李剑桥采用粒子群算法对大跨径上承式钢管混凝土拱桥拱轴线进行了优化,在结构安全性、经济性方面均取得了良好的成果;王超采用粒子群算法解决了桥墩设计中的抗震问题,很大程度上提高了优化后桥梁的抗震能力;崔凤坤将 BP 神经网络和粒子群算法相结合,然后应用于拱桥的安全度分析中,提高了安全度计算的精度。由此可见,将智能算法合适地应用于土木工程领域可以获得良好的结果,然而目前在土木工程中应用的智能算法多为标准算法,即未对算法本身进行过多干预和改进,而智能算法具有一个弊病——易于陷入局部最优,导致无法找到最优解决方案。因此,该文通过对标准粒子群算法的进化公式进行分析,提出粒子跳出局部最优的解决方案,然后将其应用于钢桁拱桥的拱肋线形优化上,同时采用标准粒子群算法作为对比,以验证所提算法的寻优精度和效率。

1 优化模型

1.1 优化变量

在某钢桁架拱桥结构中,拱肋结构几何对称,取半拱结构分析,如图 1 所示。

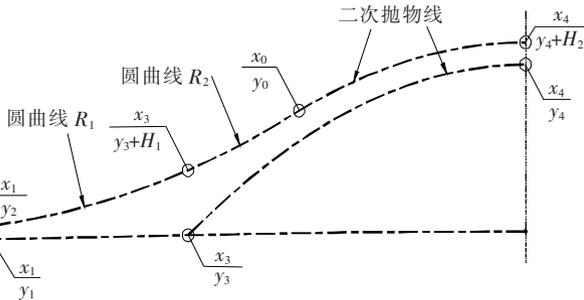


图 1 结构线形控制因素

下弦杆为二次抛物线形式,拱肋上弦杆为两段圆曲线与一段二次抛物线组合的形式。在确定桥梁跨径布置以及桥梁起点的情况下,图中的坐标参数 x_1 、 y_1 、 y_2 、 x_3 、 y_3 、 x_4 为已知参数,利用曲线之间相切的关系,可以得出 y_0 与其他未知参数之间的关系,因此为确定拱肋线形,需要拟定一下参数:① 拱脚高度 H_1 ;② 拱顶高度 H_2 ;③ 边跨圆曲线半径 R_1 ;④ 中跨圆曲线半径 R_2 ;⑤ 中跨圆曲线和二次抛物线交点顺桥向坐标 x_0 ;⑥ 拱肋下弦杆跨中顶点竖向坐标 y_4 ,利用以上参数可以确定出拱肋各曲线方程为:

拱肋下弦杆:

$$y = y_4 + \frac{y_3 - y_4}{(x_3 - x_4)^2} (x - x_4)^2 \quad (1)$$

上弦杆抛物线:

$$y = (y_4 + H_2) + \frac{y_0 - y_4 - H_2}{(x_0 - x_4)^2} (x - x_4)^2 \quad (2)$$

由于上弦杆两个圆曲线上均知道两个已知点和半径,所以圆方程为确定方程。拱顶拱脚高度主要取决于成桥运营阶段产生的内力,这些参数数值取得过高或者过低,会使钢桁架拱肋腹杆长度加大,不利于压杆稳定,同时会加大桥梁的建设成本,对桥梁的安全运营产生不利影响;边中跨圆曲线半径以及交点坐标取决于桥梁跨径布置,会对桥梁整体受力以及美观性产生较大影响。综合考虑,给出各参数的取值范围如表 1 所示。

表 1 设计变量及其优化范围

参数	初始值/m	上限值/m	下限值/m
H_1	20.559	22	18
H_2	7	9	5
R_1	300	350	250
R_2	280	310	250
x_0	1 334	1 370	1 250
y_4	136.09	140	130

1.2 目标函数

钢桁架拱桥的拱肋线形优化就是在给定范围的各个参数中,选出最合适的一组参数,使得优化的目标函数数值达到最理想取值。对钢桁架拱桥拱肋结构线形优化,由于拱肋杆件主要承受压力以及弯矩,因此选取全桥梁单元的弯曲应变能和拉压应变能作为该桥的优化目标,目标函数表达式如下:

$$U = \int \left[M^2(l) \frac{1}{2E(l)I(l)} + N^2(l) \frac{1}{2E(l)A(l)} \right] dl \quad (3)$$

由于结构为离散单元,且全桥用钢的弹性模量相同,因此式(3)可简化为:

$$U = \frac{E}{6} \sum_{i=1}^n \left[\frac{l_i}{I_i} (M_{Li}^2 + M_{Li}M_{Ri} + M_{Ri}^2) + \frac{l_i}{A_i} (N_{Li}^2 + N_{Li}N_{Ri} + N_{Ri}^2) \right] \quad (4)$$

式中: M_{Li} 、 M_{Ri} 、 N_{Li} 、 N_{Ri} 分别为第 i 个单元左右端弯矩和轴力; l_i 、 I_i 、 A_i 分别为第 i 个单元的长度、惯性矩和截面积。为了便于计算同时消除量纲的影响,该文

将初始设计的桥梁弯曲应变能和拉压应变能作为基准1,这样优化效果也更加直观。

2 概率跳跃因子粒子群算法

2.1 标准粒子群

粒子群算法属于生物启发算法,通过模拟群体生物的捕食过程来完成最优解的寻找过程。在粒子群算法中,每一个粒子被模拟为可行域内的解,粒子的位置为解的参数值,粒子的适应度值为解的优劣评价标准。在每轮迭代中,粒子的飞行方向可用式(5)、(6)表示:

$$v_i^{k+1} = \omega v_i^k + c_1 r_1 (p_i^k - x_i^k) + c_2 r_2 (g_i^k - x_i^k) \quad (5)$$

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (6)$$

式中: v_i^{k+1} 为粒子第 $k+1$ 轮迭代时的速度; x_i^{k+1} 为粒子位置; p_i^k 为粒子群全局最优; g_i^k 为粒子个体最优; ω 为速度惯性权重; c_1 、 c_2 为个体最优和全局最优的学习率; r_1 、 r_2 为随机数和学习因子,为 $[0,1]$ 之间的随机数。

2.2 概率跳跃因子粒子群算法

2.2.1 算法思想

由于标准粒子群算法的速度惯性权重,全局最优权重学习率和个体最优权重学习率均为定值,因此粒子的活动途径受到了一定的限制,特别是当粒子活动后期,粒子个体最优和实际位置之间的差值很小,从而导致粒子的活动范围受到限制,因此标准粒子群具有易于陷入局部最优的缺点。一些学者通过调整粒子的速度惯性来平衡算法的全局和局部寻优能力,但是多为确定性的权重,在迭代前期具有良好的效果,但在粒子聚集后仍不具有跳出局部最优的能力。

通过对粒子行进方式进行调整,一些学者提出了量子粒子群,粒子的行进方向由波动方程确定,使得粒子具有了概率性质,提高了粒子跳出局部最优的能力。相比量子粒子群,标准粒子群的速度更新方式更为简单,且更加直观,方便学者根据问题特点进行改进。因此该文拟将量子思想加入到标准粒子算法中,在保持粒子更新方式简单的基础上,提高粒子全局搜索能力,以此基础和目的提出了跳跃因子。

2.2.2 概率跳跃因子

为防止粒子在局部最优处过于聚集,该文提出对粒子的聚集度和进化速度进行监控,并根据监控结果对部分粒子进行调整。

(1) 聚集度

当粒子在一个区域过于聚集,会造成多数粒子的

寻优贡献减小,降低优化效率。通过监控粒子的聚集程度来对粒子行为进行动态调整,这样无需预先设定权重变化公式和路径,对粒子进化具有更强的适应性,因此该文定义粒子的聚集度为:

$$S_d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N pb_i - gb \quad (7)$$

式中: N 为粒子的总数; pb_i 为第 i 个粒子的个体最优位置; gb 为种群的全局最优位置。当 $S_d > \alpha$ 时(α 为设定的一个值,可根据问题进行调整,该文设置为 1×10^{-3}),认为粒子的聚集度过大,在全局最优附近增加更多的粒子并不会改善算法的寻优精度,且由于多数粒子的寻优途径相近,会造成计算效率低下。

(2) 粒子进化速度

在标准粒子群迭代后期,粒子往往会聚集冗余,为了解决此问题,学者通过设置粒子在进化速度慢时对粒子惯性进行操作,如果设置当粒子迭代一个固定次数时调整速度惯性权重,由于粒子的迭代速度是未知的,因此可能会在一定次数后仍有很高的进化速度,导致效果不佳。该文根据全局最优解的变化速度来设定粒子的变化时间:

$$Sv_t = \frac{\frac{1}{Tb} \sum_{i=1}^{Tb} obj(gb_{t-i}) - obj(gb_t)}{obj(gb_t)} \quad (8)$$

式中: Sv_t 为第 t 次迭代种群的进化速度; $obj(gb_t)$ 为全局最优对应的目标函数值; Tb 为判断距离, Tb 越大则对全局最优变化越不敏感,算法的迭代曲线越平顺,反之,则算法对全局最优的进化速度越敏感,粒子也更易发生震荡现象。

(3) 概率跳跃

当满足条件 $S_d > \alpha$ 且 $Sv > \beta$ 时,认为粒子的进化慢,且有冗余,粒子的进化方式应进行改变。该文提出随机概率跳跃因子来改变部分粒子的位置:

$$x_i : N(p, \sigma) \quad (9)$$

$$p = rand(pb_i)$$

当满足条件时,从种群中随机选择一个粒子,并将其位置进化方式改为随机进化,粒子的位置服从 $N(p, \sigma)$ 的整体分布,其中均值 p 为该粒子历代个体最优中随机选择的一个值,方差 σ 可以根据问题特点进行设定,该文取方差为 1×10^{-3} 。

2.2.3 算法流程

带有概率跳跃的粒子群算法的步骤如下。

步骤1:在定义域内随机初始化种群。

步骤2:将粒子的位置初始化为粒子的个体最优,

全局最优根据个体最优进行初始化。

步骤 3:根据式(5)、(6)计算粒子下一轮迭代的速度和位置,然后更新粒子。

步骤 4:根据式(7)、(8)判断是否进行跳跃,如果是则根据式(9)选择粒子进行跳跃,否则进行下一步。

步骤 5:更新个体最优和全局最优。

步骤 6:判断是否满足迭代终止条件,是,则结束迭代输出结果,否则进入步骤 3。

具体算法流程见图 2。

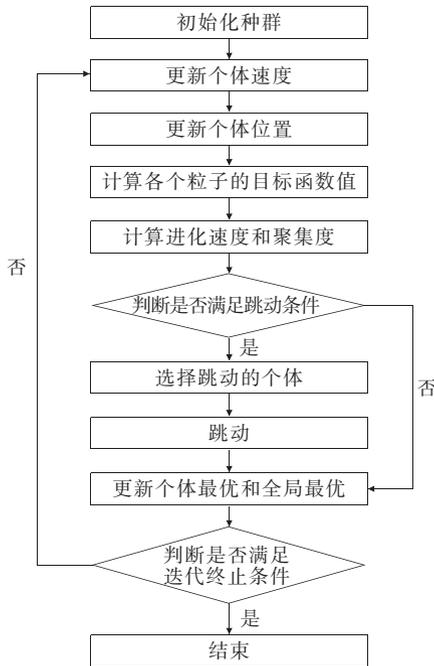


图 2 RPSO 算法流程图

2.3 算法对比

采用多峰值函数 Rastrigin 函数进行测试,函数方程如式(10)所示,图像如图 3 所示。算法迭代过程见图 4。

$$f_5 = 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)] \quad (10)$$

式中: x_i 范围为 $[-1.5, 1.5]$,式中参数取值为: $n=2$,函数在定义域内有 9 个极小值,对称分布于 x_i 值为 ± 0.5 、 ± 1.0 处,其中 $[0, 0]$ 处为全局最优解,目标函数值为 0。

从图 4 中可以看出:增加概率跳跃之后,算法的寻优精度有明显改善,而标准粒子群寻找到的全局最优位置为 $[-1.0, 0] + [-1.235 \times 10^{-12}, 2.162 \times 10^{-13}]$,表明算法寻找到了局部最优解,而非全局最优解 $[0, 0]$ 。带有概率跳跃算法的粒子群寻找到的全局最优位置为 $[5.526 \times 10^{-17}, 3.335 \times 10^{-20}]$,为定义域

内的全局最优所处位置。从粒子的迭代过程可以看出基础明显的跳跃位置,说明了算法设置的合理性。

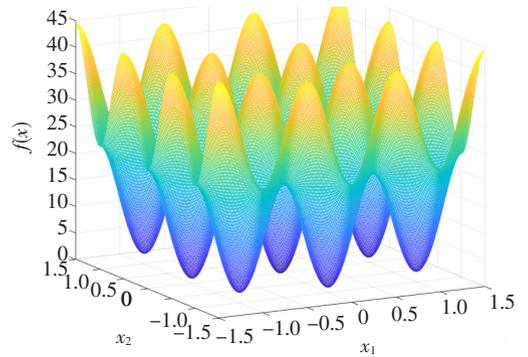


图 3 Rastrigin 函数三维图

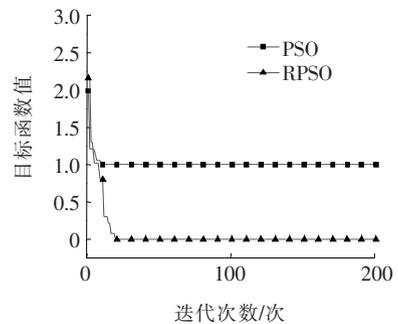


图 4 算法迭代过程图

3 工程案例

3.1 工程概况

研究对象为某中承式钢桁架拱桥,桥跨布置为 $(70 + 240 + 70)$ m,初始设计为拱肋跨中矢高 56.314 m,拱轴线矢跨比 1/4.261,拱肋跨中高度 7 m,拱脚高度 20.559 m,拱肋下弦杆为二次抛物线,拱肋上弦杆中,边跨部分为圆曲线,半径为 300 m,中跨部分为圆曲线与二次抛物线组合形式,圆曲线半径为 280 m,全桥总用钢量为 14 863.3 t。为确定拱肋线形的最优形式,该文采用 RPSO 法进行优化,并且采用 Kriging 代理模型来减少优化时间,提高优化效率。

3.2 Kriging 代理模型

智能算法在每轮迭代中均需要计算每个新粒子的适应度,且智能算法为了保证精度,往往会设置较大数目的个体,因此智能算法具有计算量大的特点。为了加速迭代,一些学者采用了代理模型的解决方案,即采用一个简单的、显式的关系来替换设计参数与目标量之间的隐式有限元关系。由于显式的计算消耗较有限元模型的计算消耗明显减小,因此采用代理模型后可

以极大地提高优化效率。

常用的代理模型有响应面模型、神经网络模型(ANN,RBF)、Kriging模型等,响应面模型和神经网络模型属于确定性模型,即当样本点确定之后,每个样本点对所有预测点的贡献是相同的,而Kriging属于半确定半概率模型,即每个样本点对预测点的贡献是不同的。

Kriging模型由确定性的多项式部分和概率性的随机部分组成,如下式所示:

$$y(x) = \sum_{i=1}^p \beta_i f_i(x) + z(x) = f^T(x)\beta + z(x) \quad (11)$$

式中: $f^T(x)\beta$ 为线性回归部分, β 为线性回归系数。线性回归函数 $f^T(x)$ 可以选用零次(常数)、一次、二次等形式,次数越高,线形部分对数据的拟合越好,但过高的次数容易出现过拟合的现象,因此一般选择二次为优; $z(x)$ 为随机误差部分,随机误差是一个期望为0的高斯平稳随机分布。它服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$,并具有以下性质:

$$\begin{aligned} E[z(x)] &= 0 \\ \text{Var}[z(x)] &= \sigma^2 \\ \text{cov}[z(\omega)z(x)] &= \sigma^2 R(\theta, \omega, x) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $R(\theta, \omega, x)$ 为相关函数,是关于预测点与样本点之间距离的函数,距离越大,样本点对预测点的影响越小。

3.3 优化过程及结果分析

利用拉丁超立方方法进行抽样,将抽取的样本点代入钢桁拱的线形方程,确定拱上每点的坐标,然后建立有限元模型,计算结构的响应。

在设计变量的可行域内共抽取了200个样本点,然后根据样本点与对应响应之间的关系建立Kriging代理模型(表2),同时观察MSE(均方误差),检验代理模型的拟合精度。

表2 Kriging代理模型信息

项目	取值
抽样方法	拉丁超立方
样本点数	200
Kriging线性回归次数	二次
θ 初始值	[1.0 1.0 1.0 1.0 1.0 1.0]
θ 修正值	[1.79 0.03 5.22 4.35 10.23 0.06]
MSE	4.812×10^{-13}

从表2中可以看出:Kriging模型的MSE非常小,表明代理模型精度较高,可以用于后续的寻优过程。

采用概率跳跃粒子群算法进行寻优,同时采用标准粒子群算法进行对比,观察算法改进前后的寻优精度和寻优效率。算法设置如表3所示。优化结果如表4所示。

表3 算法参数设置信息

参数	取值	备注
粒子个数	500	
参数维度	6	
最大迭代次数	100	设为迭代终止条件
学习率 c_1, c_2	[2, 2]	
速度惯性权重 ω	0.7	
α	1×10^{-3}	仅用于RPSO
β	1×10^{-3}	仅用于RPSO
σ	1×10^{-3}	仅用于RPSO
Tb	5	仅用于RPSO

表4 两种算法优化结果对比

算法	参数优化结果	目标函数值(未优化时为1)	优化耗时/s
PSO算法	[21.356, 6.551, 329.334, 289.693, 1340.362, 137.893]	0.932	1.109
RPSO算法	[21.089, 6.164, 300.891, 273.165, 1335.358, 135.859]	0.782	1.240

从表4可以看出:RPSO的优化结果明显优于标准PSO,并且两种算法优化的参数结果也位于不同位置。由于优化参数为6维,且优化变量与结构输出之间的关系复杂,因此问题存在多个局部峰值,增加了寻找全局最优解的困难。在寻优时间上,由于该文设置的终止条件未达到最高迭代次数,因此两种算法相差不大,表明增加随机跳跃后,算法的复杂程度并未增加很多。表5为3种情况下主拱肋的应力位移计算结果。图5为PSO及RPSO两种算法目标函数值的对比结果。

由表5可知:RPSO优化后,主拱肋压应力比设计减小了13.88 MPa,拉应力减小了9.44 MPa,竖向位

表 5 3 种情况主拱肋应力位移计算结果

算法	最大压应力/MPa	最大拉应力/MPa	最大竖向位移/mm
设计	88.82	63.47	131.74
PSO	81.08	55.57	120.58
RPSO	74.94	54.03	118.01

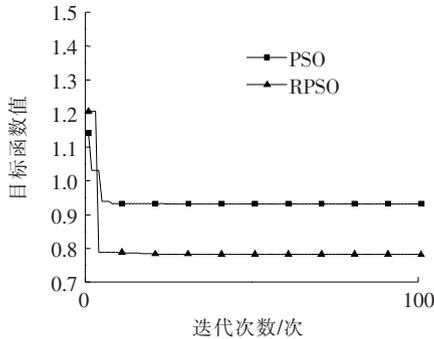


图 5 目标函数迭代对比图

移减小了 13.73 mm, 应力和位移减小幅度均比 PSO 优化要大, 优化效果更加明显。

从图 5 可以看出, 优化后结构的线形满足平顺要求。从算法的迭代过程图中可以看出, 改进后的粒子群算法进化速度更快, 且寻找到的解的精度也越高, 即给出的拱肋线形方案更优。

4 结论

(1) 采用聚集度和优化速度作为粒子跳动时机的判别标准, 可以有效防止粒子冗余, 提高优化速度, 且在相同迭代次数时, 所提算法寻优精度更高。

(2) 经过对拱轴线上弦杆线形的优化, 桥梁主拱肋压应力减小了 13.88 MPa, 拉应力减小了 9.44 MPa, 竖向位移减小了 13.73 mm, 整体应变能减小了 21.8%, 全桥受力更加合理, 同时可以为下一步节约钢材提供依据。

参考文献:

[1] 盖卫明. 大跨度钢桁拱桥的稳定与极限承载力研究[D]. 中南大学硕士学位论文, 2009.

[2] 蔡健. 大跨度钢桁架系杆拱桥的稳定与极限承载力研究[D]. 中南大学硕士学位论文, 2012.

[3] 李剑桥. 基于粒子群算法大跨径上承式钢管混凝土拱桥优化分析[D]. 长安大学硕士学位论文, 2017.

[4] 赵伟, 郑剑涵, 陆森强. 特大跨系杆钢拱桥成桥状态与吊杆张拉力优化分析[J]. 中外公路, 2016(1).

[5] 周银, 张雪松. 基于最小弯曲能的结合梁斜拉桥恒载索力优化计算方法[J]. 中外公路, 2018(4).

[6] 孙海涛. 大跨度钢桁架拱桥关键问题研究[D]. 同济大学博士学位论文, 2007.

[7] 翁顺, 左越, 朱宏平, 等. 基于子结构的有限元模型修正方法[J]. 振动与冲击, 2017(4).

[8] 宗周红, 褚福鹏, 牛杰. 基于响应面模型修正的桥梁结构损伤识别方法[J]. 土木工程学报, 2013(2).

[9] 王超. 基于粒子群算法的桥墩多目标优化设计方法研究[D]. 西安工业大学硕士学位论文, 2016.

[10] 崔凤坤, 王虎军, 徐岳, 等. 基于 BP 神经网络和粒子群算法的钢管混凝土拱桥可靠度分析[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2016(8).

[11] Qisheng C, Teng L, Zhu W, et al. Multiple Paths Planning for UAVs Using Particle Swarm Optimization with Sequential Niche Technique[C]. 第 28 届中国控制与决策会议论文集, 2016.

[12] Xu M, Zhang L, Du B, et al. A Mutation Operator Accelerated Quantum-Behaved Particle Swarm Optimization Algorithm for Hyperspectral Endmember Extraction[J]. Remote Sensing, 2017(3).

[13] 徐刚, 瞿金平, 杨智韬. 一种改进的自适应粒子群优化算法[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2008(9).

[14] 徐珊珊, 金玉华, 张庆兵. 带全局判据的改进量子粒子群优化算法[J]. 系统工程与电子技术, 2018(9).

[15] 欧阳龙. 基于协同随机量子粒子群算法的自适应频率复用方法研究[D]. 武汉大学硕士学位论文, 2017.

[16] 张艺瀛, 金志刚. 一种高维多模态优化的量子粒子群优化算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2018(11).

[17] Qin S, Zhang Y, Zhou Y, et al. Dynamic Model Updating for Bridge Structures Using the Kriging Model and PSO Algorithm Ensemble with Higher Vibration Modes[J]. Sensors, 2018, 18(6).

[18] Qin S, Zhou Y, Cao H, et al. Model Updating in Complex Bridge Structures Using Kriging Model Ensemble with Genetic Algorithm[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2018, 22(9): 3 567-3 578.

[19] Lv Z, Lu Z, Wang P. A New Learning Function for Kriging and its Applications to Solve Reliability Problems in Engineering[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2015, 70(5).

[20] 林玉锋, 陈璟, 陈少飞, 等. 一种新颖的混合响应面优化方法[J]. 计算机应用研究, 2012(6).