

## 多元分布代表点法在服役锈蚀梁可靠性分析中的应用

蔡俊华<sup>1,2</sup>

(1. 中国地质大学(武汉), 湖北 武汉 430074; 2. 三明市交通建设集团有限公司)

**摘要:** 为了高效率、高精度地对服役锈蚀梁可靠性展开研究, 该文基于数论方法中的多元分布代表点提出了一种新的可靠度计算方法。首先, 介绍了多元分布代表点的定义和生成方法, 以及多元随机变量函数特征值(均值及标准差)的计算方法; 随后建立了服役锈蚀梁的抗弯承载力及可靠度计算模型; 最后基于多元分布代表点法对服役锈蚀梁的承载力及可靠性进行分析, 并将分析结果与 JC 法及 Monte Carlo 方法得到的计算结果进行对比。同时基于不同混凝土保护层厚度和强度下锈蚀梁抗弯承载力的退化规律, 对结构抗弯承载力进行敏感性分析。研究表明: 该文提出的方法具有较好的计算效率及较高的计算精度, 能大幅减少样本的数量, 适应于工程实际运用。同时混凝土保护层厚度及强度的合理增大均能有效提高锈蚀梁在服役过程中的抗弯承载力。

**关键词:** 多元分布代表点法; 锈蚀梁; 承载力; 可靠性; 蒙特卡洛法

在钢筋混凝土(RC)构件服役期间, 由于氯离子侵蚀等外界环境的影响, 钢筋及混凝土的几何特性、材料力学性能、钢筋混凝土之间的黏结程度均会发生一定的改变, 从而导致结构承载力和可靠性下降, 最终带来较大的人员伤亡和财产损失。近年来, 部分学者对锈蚀构件承载力及可靠性进行了大量研究。张克波针对多片梁的正截面抗弯承载力进行对比试验, 结合已有研究成果, 给出了极限状态下锈蚀 RC 的应力应变关系, 并给出了一种锈蚀 RC 梁抗弯承载力的计算分析方法; 牛荻涛等在国内外研究基础上, 提出了锈蚀 RC 梁抗弯承载力计算方法, 给出了锈蚀梁的抗力衰减随机模型; 秦权在考虑退化结构功能函数随机过程和 3 种不同的活载过程基础上, 推导出一个时段内的时变可靠度公式, 并用算例验证。目前大部分学者在计算

服役结构承载力或可靠度时均采用 Monte-Carlo 法, 虽然此法得到的结果精度较高, 但其计算复杂、计算成本高昂, 不利于作为实际工程可靠性分析的常规方法。

在锈蚀梁承载力分析中, 选择适当的分析方法计算承载力均值及标准差函数直接影响着可靠性分析的准确性。目前越来越多的学者关注结构可靠性的分析方法。王国萍基于桥梁结构抗力分析, 运用中心点法、JC 法、映射变换法和实用分析法对结构可靠指标进行计算, 给出了计算迭代步骤, 并对比分析了以上方法的优劣; 汪新槐等通过传统的蒙特卡罗方法和 GLP 点集法对多维数值积分的计算进行对比分析, 得出数论方法具有传统方法不可比拟的高精度, 并使用数论方法对结构的可靠度分析进行计算; 崔维成等利用改进的 Rosenbluth 法对现有计算随机变量函数均值与标准

## 参考文献:

- \*\*\*\*\*
- [1] 葛耀君. 分段施工桥梁分析与控制[M]. 北京: 人民交通出版社, 2003.
- [2] 何畏, 唐亮, 强士中, 等. 大跨度焊接钢箱梁斜拉桥施工控制技术及应用[J]. 桥梁建设, 2002(5).
- [3] 陈常松, 颜东煌, 陈政清. 超大跨度斜拉桥的自适应无应力构形控制法[J]. 中外公路, 2008(1).
- [4] 但启联. 基于无应力状态控制法的分阶段成形桥梁结构线形控制理论及应用[D]. 西南交通大学博士学位论文, 2017.

- [5] 陈太聪, 苏成. 桥梁悬臂拼装施工中钢箱梁制造尺寸的确定[J]. 中国公路学报, 2011(4).
- [6] 赵雷, 贾少敏, 杨兴旺. 悬拼施工中钢箱梁制造尺寸的确定[J]. 西南交通大学学报, 2014(5).
- [7] 梁鹏, 肖汝诚, 徐岳. 超大跨度斜拉桥的安装构形与无应力构形[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2006(4).
- [8] 吴朴, 邹黎琼. 无应力长度参数正装迭代法工程应用[J]. 中外公路, 2018(2).

收稿日期: 2019-11-23(修改稿)

作者简介: 蔡俊华, 男, 博士研究生, 高级工程师. E-mail: smcjh626@163.com

差进行了详细的研究,并对结构的可靠度进行了计算。但现有分析方法在精度、计算效率、计算成本等方面或多或少具有一定的缺陷,所以亟需对可靠性分析方法进行深入研究。

数论方法是一种强有力的统计应用工具,具有高精度、简便、快速的优点,且随着相关知识的发展,其越来越多地应用在经济、机械、工程等领域。因此,在现有研究的基础上,该文将数论中的多元分布代表点法与服役锈蚀梁承载力及可靠度分析模型相结合,提出了一种新的可靠度分析方法,并通过算例分析将上述方法与传统结构可靠性分析方法进行比较,验证了该法的有效性。

## 1 多元分布代表点法

### 1.1 方法介绍

多元分布代表点法与 Monte-Carlo 分析方法类似,两者最主要差别是前者是基于生成的代表点进行计算,而后者是基于随机变量进行分析。由文献[12]可知:假设  $G(x) = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是一定义在  $S$  维空间( $R^s$ )上的、有界闭区间  $D$  的连续均匀分布函数,  $\{P_n\}$  为上述  $S$  维空间中某一拥有固定结构的、个数为  $n$  的点序列,如果  $P_n$  关于  $G(x)$  的  $F$ -一偏差满足式(1)、(2),则  $\{P_n\}$  可视为有界闭区间  $D$  上的均匀散布。且若  $n$  个点集  $P^*$  满足式(3),则点集  $P^*$  即为连续分布函数  $G(x)$  的代表点:

$$D_G(n, p_n) = o(n^{-1/2}), n \rightarrow +\infty \quad (1)$$

$$D_G(n, p_n) = \sup_{x \in R^s} |G_n(x) - G(x)| \quad (2)$$

$$D_G(n, P^*) = \min_p D_G(n, P_n) \quad (3)$$

其中:  $G_n(x)$  为样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的经验分布。

在数论方法中,代表点生成方法因不同的分布类型而有所差异。对于  $S$  维空间多元连续分布函数而言,该文采用 NTSR 算法(具体步骤见算例分析)生成所需的代表点,该法的关键在于如何有效、快捷地寻找数论网格。王元等在《数论方法在统计中的应用》中介绍了多种寻找数论网格的方法,该文选取计算较为简便的 Haber 序列来寻找  $S$  维单位立方体上的数论网格,其主要计算公式如下:

$$c_m = \left( \frac{m(m+1)}{2} \sqrt{Z_1}, \frac{m(m+1)}{2} \sqrt{Z_2}, \dots, \frac{m(m+1)}{2} \sqrt{Z_s} \right) \quad (4)$$

式中:  $c_m$  为  $s$  维单位立方体上求得的一个数论网格

( $NT-net$ );  $m = 1, 2, \dots, n$ ;  $Z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) 为第  $k$  个质数。

### 1.2 随机变量函数特征值计算

对于任意计算方法而言,随机变量的特征值是整个计算过程的基础。该文采用 NTSR 算法得到的多元分布代表点来代替多元分布函数  $G(x)$  的  $s$  个变量,在求得随机变量的特征值后,依据相关的计算模型对锈蚀梁承载力及可靠度展开分析。其中多元随机变量函数的均值和标准差可由下式计算得到:

$$\mu_G = \sum_{m=1}^n G(t_m) / n \quad (5)$$

$$\sigma_G = \sqrt{\left[ \sum_{m=1}^n G^2(t_m) - n\mu_G^2 \right] / (n-1)} \quad (6)$$

式中:  $t_m$  为抗弯承载力  $R(t)$  的第  $m$  个代表点。

## 2 锈蚀梁的可靠度分析

### 2.1 承载力计算模型

钢筋混凝土结构在服役过程中,受到氯离子侵蚀、混凝土碳化、劣化效应等各种因素的影响,导致钢筋锈蚀后的截面面积、钢筋屈服强度、混凝土和钢筋之间的黏结效应等随着时间的推移发生退化,从而导致结构承载能力下降。该文以矩形截面梁为例(其他截面梁除抗力计算公式略有差异,其余均一致),考虑锈蚀对钢筋截面面积、钢筋屈服强度及钢筋与混凝土之间的黏结性能等多方面的影响,综合文献[14]的结论,得到服役 RC 梁的极限抗弯承载力  $R(t)$  计算公式:

$$R(t) = \sum_{i=1}^q ME \cdot ME_{\text{bond}} \cdot R_i(t) \left[ h_0 - \frac{R_i(t)}{2f_{\text{cuk}}b} \right] \quad (7)$$

式中:  $ME$  为模型不确定系数,其均值和方差分别为 1 和 0.04;  $ME_{\text{bond}}$  为锈蚀钢筋与混凝土的协同工作系数,其取值见文献[15];  $q$  为计算服役梁抗力时材料类型的数量;  $R_i(t)$  为第  $i$  种材料锈蚀后的抗力时变函数,其中钢筋锈蚀后的抗力可用  $t$  时刻的钢筋剩余截面面积与屈服强度的乘积表示,计算方法见文献[16];  $h_0$ 、 $f_{\text{cuk}}$  和  $b$  分别为截面的有效高度、混凝土抗压强度和梁宽。

### 2.2 可靠度分析

在得到服役锈蚀梁抗弯承载力退化模型后,即可建立与之对应的弯曲强度极限状态函数:

$$Z(t) = R(t) - S(t) = R(t) - S_G - S_Q(t) \quad (8)$$

式中:  $S_G$  和  $S_Q(t)$  分别为恒载和活载的作用效应。

在  $t$  时刻,当  $Z > 0$  时,结构抗力大于所承受的荷载效应,此时结构处于可靠状态;当  $Z < 0$  时,结构抗力小于所承受的荷载效应,对应结构处于失效或破坏状态;当  $Z = 0$  时,结构抗力与承受的荷载效应一致,结构处于极限状态。

根据式(9)可以求得任意时段内失效个数  $n_f$ ,则系统抗弯可靠度指标  $\beta$  可由式(10)计算得出。运用多元代表点法计算系统抗弯可靠度指标的流程如图 1。

$$P_r = 1 - P_f = 1 - n_f/n \quad (9)$$

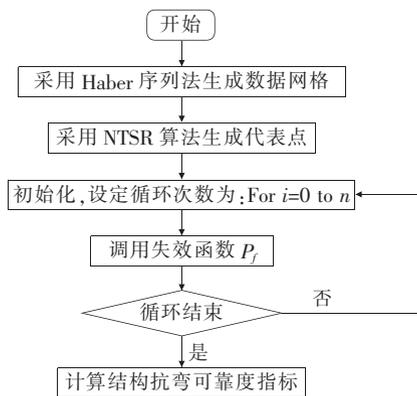


图 1 该文所提出方法的计算流程图

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (10)$$

式中:  $n$  为采样数目;  $\Phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布的反函数。

### 3 算例分析

#### 3.1 工程概况

该文以一座建于 20 世纪 80 年代的钢筋混凝土实心板桥为例进行抗弯承载力及可靠度的计算。该桥计算跨径及桥面净宽分别为 11.2、10 m,板宽和板高分别为 1.1、0.68 m,桥面铺装由 3.6 cm 的沥青混凝土和 10 cm 的水泥混凝土组成,设计荷载对应现行的公路 II 级。主梁受拉主筋为  $14\phi 28$ ,混凝土标号为 C30,保护层厚度 25 mm,环境温度和湿度分别为 22 °C 和 78%,参考同类海岸线结构大气区环境,腐蚀电流密度视为均值  $2.95 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ 、变异系数为 0.7 的对数正态分布。单片主梁横截面如图 2 所示,其余与抗弯承载力及可靠度计算相关的统计参数见表 1。

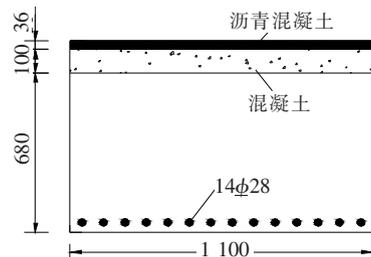


图 2 单片主梁横截面示意图(单位:mm)

表 1 参数统计结果

项目	混凝土保护层厚度 $C$	混凝土抗压强度 $f_{cu}$	钢筋初始直径 $D_0$	钢筋初始屈服强度 $f_{y0}$	梁截面有效高度 $h_0$	梁的截面宽度 $b$	梁的截面高度 $h$
均值	1.017 8	1.586 8	1.000	1.084 9	1.011 2	1.001 3	1.006 4
变异系数	0.049 6	0.192 8	0.015	0.071 9	0.023 6	0.008 1	0.025 5
分布类型	正态分布	正态分布	正态分布	正态分布	正态分布	正态分布	正态分布
参考文献	[18]	[19]	[18]	[20]	[21]	[22]	[22]

#### 3.2 计算步骤

运用多元分布代表点法,结合由式(7)给出的抗弯承载力计算模型,即可求出任意时间点锈蚀梁剩余抗弯承载力。现举例计算  $t=100$  年时锈蚀梁的抗弯承载力,具体计算步骤如下(计算均用 Matlab 实现):

(1) 分别求出  $t=100$  年时  $ME_{\text{bond}}$  和  $R_i(t)$  两个参数的均值和方差,则式(7)中的 6 个随机变量均值、标准差均为已知。

(2) 由式(7)可确定  $s=6$ ,取样本数量  $n=2\ 500$ ,  $p_1=1, p_2=3, p_3=5, p_4=9, p_5=11, p_6=13$ ,利用 Haber 序列,作为生成数论网格的方法,代入式(4),分别求出以上所有的数论网格  $\{c_m, m=1, 2, \dots, n\}$ 。

(3) 定义正随机变量  $R=ME$ ,其分布函数的逆函数为  $F_R^{-1}$ ,使用  $c_m$  中的最后一个分量  $c_{m6}$ ,求出  $\{F_R^{-1}(c_{m6}), m=1, \dots, n\}$ ,记为  $r_m$ 。同时使用  $c_m$  中的前 5 个分量,产生有界闭区间  $D$  上的数论网格  $\{y_m, m=1, 2, \dots, n\}$ 。

(4) 把  $r_m$  和  $y_m$  的乘积作为式(7)抗弯承载力  $R(t)$  的代表点集  $\{t_m, m=1, 2, \dots, n\}$ 。

(5) 把求得的代表点集  $\{t_m, m=1, 2, \dots, n\}$  分别代入式(5)、(6),即可求得  $t=100$  年时,锈蚀梁抗弯承载力  $R(t)$  的均值和标准差。

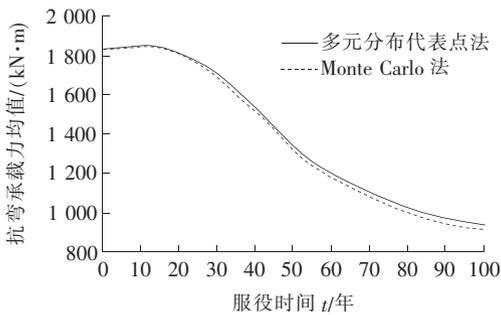
#### 3.3 抗弯承载力计算结果及敏感性分析

为了验证多元分布代表点法的有效性,该文同时

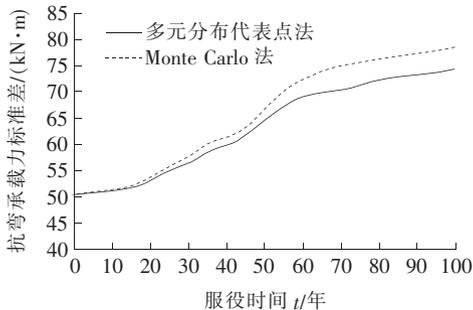
采用计算精度高、稳定性好、但计算成本非常高的 Monte Carlo 法对锈蚀梁在设计使用期 100 年内的抗弯承载力进行计算,并对两种方法得到的计算结果进行比较,具体如图 3 所示。

由图 3 可知:无论采用哪种计算方法,由于服役初期结构混凝土的强度会有一些的增加,构件抗弯承载力均值都会略微增大。而从第 16 年开始,由于混凝土开裂及钢筋开始锈蚀,结构抗弯承载力的均值均逐渐下降,且下降速率呈现先快后慢的特点。同时整个服役期间,服役结构抗弯承载力的标准差均逐渐加大。

对于抽样次数为 50 000 的 Monte Carlo 法而言,该梁服役 100 年后抗弯承载力均值和标准差的计算结果分别为 918.7 kN·m 和 78.5 kN·m,而基于样本数为 2 500 的多元分布代表点法得到的对应结果分别比上述值高 2.45% 和低 5.35%,其均值和标准差分别为 941.2 kN·m 和 74.3 kN·m。此外,Matlab 软件程序性能测试功能显示后者的计算完成时间仅为前者的 1/6。综上可知:多元分布代表点法在计算结构承载力时具有较高的精度,其产生的代表点较 Monte Carlo 法产生的随机数具有更小的离散性,且所要求的样本点较少,计算速度更快,具有良好的实践运用价值。



(a) 锈蚀梁抗弯承载力均值



(b) 锈蚀梁抗弯承载力标准差

图 3 锈蚀梁抗弯承载力均值及标准差变化情况

由于不同地区的环境、不同材料的结构性能及结构尺寸不同,RC 桥梁的抗弯承载力退化有较大差异。因此有必要对 RC 构件抗弯承载力退化进行敏感性分

析,为桥梁结构设计优化提供基础。该文基于所提出的方法,分析不同混凝土保护层厚度及强度对服役锈蚀梁抗弯承载力均值的影响,具体结果如图 4、5 所示。

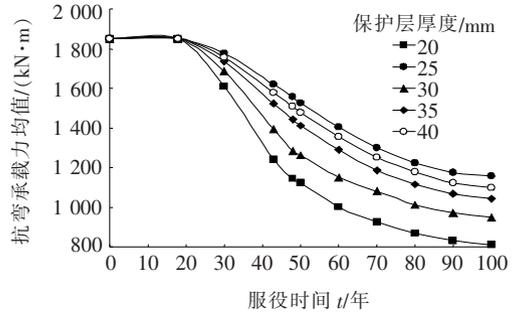


图 4 保护层厚度和抗弯承载力均值

不同混凝土保护层厚度和强度对应的服役梁正截面抗弯承载力在服役年限内有着较大差异。由图 4 可知:随着保护层厚度的增大,结构抗弯承载力均值下降开始的时间逐渐延后,且最终降低幅度也大幅减小。这主要是因为混凝土保护层厚度的增加能提高混凝土对钢筋的保护,延缓氯离子的侵蚀过程,较大幅度地降低结构性能退化。由图 5 可知:在该文研究的混凝土强度变化范围内,随着混凝土强度的增加,结构的初始抗弯承载力和锈蚀后的抗弯承载力均有一定的提高,但增加的幅度逐渐减小。综上可知,在合理的范围内增加混凝土保护层厚度或强度均能有效提高服役锈蚀梁的抗弯承载力。因此,在 RC 桥梁的实际设计和施工过程中,应选取合适的混凝土保护层厚度和强度,保护结构免于过早锈蚀,防止事故的发生。

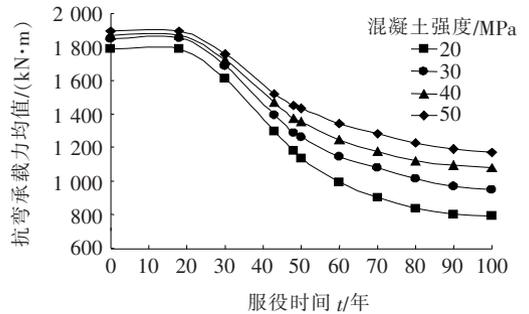


图 5 混凝土强度和抗弯承载力均值

### 3.4 可靠度分析

在得到服役锈蚀 RC 梁的抗弯承载力后,即可通过式(8)~(10)进一步得到系统抗弯可靠度指标,其中恒载、活载、车辆荷载效应模型见文献[22]。图 6 为基于多元分布代表点法、Monte Carlo 法及 JC 法 3 种不同方法得到的锈蚀 RC 梁在服役 100 年内的抗弯可靠度时变图。

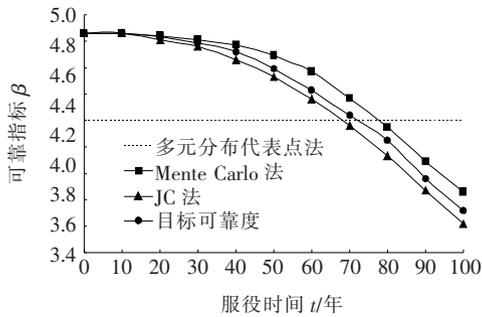


图 6 不同方法可靠度指标  $\beta$  计算结果比较

由图 6 可知:随着服役时间的增加,3 种方法计算得到的可靠度指标  $\beta$  均逐渐降低。若以多元分布代表点法得到的结果为参考,该桥在服役 72 年左右将达到规范规定的可靠度指标极限值( $\beta=4.2$ ),所以在此之前应对该桥梁进行必要的维护加固处理,确保结构安全、可靠。由图 6 进一步分析可知:基于多元分布代表点法(样本数为 2 500)得到的可靠度计算结果比 JC 法对应结果更为接近基于 Monte Carlo 法(抽样次数为 50 000)得到的计算结果。同时,在 Matlab 计算过程中,3 种方法的计算效率由高到低依次为:JC 法、多元分布代表点法和 Monte Carlo 法。因此,该文提出的多元分布代表点法较 JC 法精度更高,较 Monte Carlo 法计算速度更快,得到的统计参数离散性更小,且能大幅降低所用样本数量。因此该法可以用来进行服役锈蚀梁的可靠性分析。

## 4 结论

(1) 介绍了多元分布代表点法在服役锈蚀梁可靠性分析中的运用,并基于算例分析与传统分析方法进行了比较,验证了该法的有效性。

(2) 该文提出的多元分布代表点法较 JC 法精度更高,较 Monte Carlo 法计算速度更快,得到的统计参数离散性更小,且能大幅地降低所用样本数量。因此该法可以较好地用来分析服役锈蚀梁可靠性。

(3) 对服役 RC 构件的抗弯承载力进行了敏感性分析,发现在合理的范围内增加混凝土保护层厚度或强度均能有效提高服役锈蚀梁的抗弯承载力。

## 参考文献:

[1] 夏晓慧,刘小平,聂美春. 腐蚀钢筋混凝土构件斜截面承载能力分析[J]. 公路工程,2012(5).

- [2] 刘正洋. 氯盐环境下钢筋强度时变模型[J]. 公路工程, 2015(3).
- [3] 张克波. 锈蚀 RC 构件力学性能与整桥破坏性试验研究[D]. 长沙理工大学博士学位论文,2009.
- [4] 牛荻涛,卢梅,王庆霖. 锈蚀钢筋混凝土梁正截面受弯承载力计算方法研究[J]. 建筑结构,2002(10).
- [5] 秦权. 退化结构时变可靠度分析[J]. 清华大学学报(自然科学版),2005(6).
- [6] 孙彬,牛荻涛,王庆霖. 锈蚀钢筋混凝土梁抗弯承载力计算方法[J]. 土木工程学报,2008(11).
- [7] 金伟良,赵羽习. 锈蚀钢筋混凝土梁抗弯强度的试验研究[J]. 工业建筑,2001(5).
- [8] 牛荻涛,翟斌,王林科,等. 锈蚀钢筋混凝土梁的承载力分析[J]. 建筑结构,1998(8).
- [9] 王国萍. 既有钢筋混凝土桥梁概率可靠度评估理论探索与工程应用[D]. 云南大学硕士学位论文,2015.
- [10] 汪新槐. 多维数值积分的数论方法及其在结构可靠度分析中的应用[D]. 河海大学硕士学位论文,2005.
- [11] 崔维成,徐向东,邱强. 一种快速计算随机变量函数均值与标准差的新方法[J]. 船舶力学,1998(6).
- [12] 方开泰,王元. 数论方法在统计中的应用[M]. 北京:科学出版社,1996.
- [13] 周志革,黄文振,张利. 一种计算随机变量函数均值和标准差的方法[J]. 机械强度,2001(1).
- [14] GB/T 50283 公路工程结构可靠度设计统一标准[S].
- [15] 马亚飞. 基于信息更新的 RC 受弯构件抗力衰减概率模型[D]. 长沙理工大学硕士学位论文,2011.
- [16] 王立成,宋桂亭. 氯盐腐蚀条件下钢筋混凝土结构抗力衰减模型研究[J]. 中国海洋平台,2006(5).
- [17] DuraCrete. Probabilistic Performance Based Durability Design of Concrete Structures—Statistical Quantification of the Variables in Limit State Functions[R]. Gouda: The European Union Brite EuRam III, Project BE 95—1 347,1998:16—65.
- [18] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连:大连理工大学出版社,2003.
- [19] 牛荻涛. 混凝土结构耐久性与寿命预测[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [20] 李扬海,鲍卫刚,郭修武,等. 公路桥梁结构可靠度与概率极限状态设计[M]. 北京:人民交通出版社,1997.
- [21] 赵尚传,赵国藩. 基于可靠性的在役混凝土结构剩余使用寿命预测[J]. 建筑科学,2001(5)
- [22] 李炬. 锚贴钢板加固锈蚀 RC 梁的试验研究及抗弯性能分析[D]. 长沙理工大学硕士学位论文,2015.