

基于悬链线的斜拉索垂度效应等效弹性模量计算方法

赵海霞¹, 张文明^{2*}, 蒋晓放², 刘钊²

(1. 南京航空航天大学 金城学院, 江苏 南京 211156; 2. 东南大学 土木工程学院)

摘要: 为了精确计算垂度效应引起的超长斜拉索刚度折减, 基于无弹性悬链线理论和弹性悬链线理论分别建立了斜拉索等效弹性模量的数值算法和简化公式算法。利用沪通长江大桥最长斜拉索作为算例, 对比分析了该文方法与传统 Ernst 公式的计算精度。结果表明: Ernst 公式对于低应力水平的斜拉索精度不高, 误差高于 10%, 甚至高达 17%; 随着应力的增大, 误差逐渐减小到 1% 以内。该文简化公式算法误差不超过 0.3%, 精度高于 Ernst 公式。Ernst 公式计算结果高于数值解, 而该文简化公式计算结果略低于数值解。索受力前后线密度的变化对等效弹性模量的影响可忽略不计。

关键词: 斜拉索; 垂度效应; 等效弹性模量; 悬链线; Ernst 公式

1 前言

斜拉桥是一种受力合理、造型美观的桥型, 近 60 年来得到了迅猛发展。中国 2008 年建成的苏通大桥(主跨 1 088 m)将斜拉桥跨径首次突破千米大关, 同年中国香港建成了主跨 1 018 m 的昂船洲大桥, 2012 年俄罗斯建成了主跨 1 104 m 的俄罗斯岛大桥。中国目前正在施工的沪通长江大桥(主跨 1 092 m)是目前世界最大跨度的公铁两用斜拉桥, 也是世界首座跨度超过千米的公铁两用桥梁。

随着斜拉桥跨度的增大, 斜拉索的长度及水平投影长度也随之增大。上述 4 座斜拉桥的最长斜拉索长度分别为 581、540、580 和 576 m, 最长斜拉索的水平投影长度分别为 533、450、483 和 544 m。现代斜拉桥多采用密索体系, 斜拉索的安全系数不小于 2.5, 因此成桥状态斜拉索应力水平不高, 一般小于 700 MPa。在施工期内, 新安装的斜拉索应力水平往往更低。斜拉索超长的水平投影及低应力水平导致其垂度效应明显。斜拉索垂度的大小与索力有关, 垂度与索力呈非线性关系。斜拉索张拉时, 索的伸长量包括弹性伸长以及克服垂度所带来的伸长, 为了方便计算, 可以用等效弹性模量的方法, 在弹性伸长公式中计入垂度的影

响。1965 年, Ernst 基于斜拉索抛物线线形推导出等效割线模量公式, 考虑了拉索初始应力和拉索应力刚化现象, 得到了广泛应用; 洪显诚和 Hajdin 分别于 1992 年和 1998 年推导出了既计入垂直于拉索的自重分量又考虑平行于拉索自重分量作用的等效弹性模量公式, 对 Ernst 公式进行了修正。为了解决使用 Ernst 公式时可能出现的索拉力与拉伸量之间关系的不闭合问题, 2000 年李国平提出了斜拉索非线性分析的状态修正法; 之后, 国内外学者开始了基于拉索的悬链线线形研究垂度引起的几何非线性问题。2001 年夏桂云等推导了斜拉索的等效刚度表达式, 该公式把拉索水平分力作为输入变量之一, 这一点与 Ernst 公式不一致; 2009 年 Vairo 提出了一个改进的精细割线等效弹性模量公式, 2012 年又计入了温度效应的影响。为了简化推导过程, 他们均使用了小垂度假定, 认为拉索水平分力与轴力之比为拉索两端点连线倾角的余弦值。2015 年王立彬等引入损伤程度、范围和位置 3 个参数, 以弧坐标作为基本变量推导出损伤拉索静力分析的基本模型, 但没有给出等效弹性模量的具体表达式。

该文基于悬链线线形, 首先建立斜拉索等效弹性模量的数值算法; 然后摒弃小垂度假定推导出等效弹性模量的简化公式, 利用斜拉索上端点的轴向拉力作为输入变量之一, 与 Ernst 公式一致, 方便使用。

收稿日期: 2019-09-29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(编号: 51678148); 江苏省自然科学基金资助项目(编号: BK20181277)

作者简介: 赵海霞, 女, 硕士, 讲师。

* 通信作者: 张文明, 男, 博士, 副教授。E-mail: zwm@seu.edu.cn

2 Ernst 公式

常用的 Ernst 公式可表达为:

$$E_{eq} = \frac{E_e}{1 + \frac{(\gamma l_0)^2}{12\sigma^3} E_e} \quad (1)$$

式中: E_{eq} 为斜拉索的等效弹性模量; E_e 为钢丝的弹性模量; γ 为钢丝重度; l_0 为水平投影长度; σ 为应力, $\sigma = T/A$; T 为上端点的轴向拉力; A 为横截面面积。

3 斜拉索悬链线线形和基本参数

图 1 所示斜拉索,其悬链线线形的微分方程为:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2)$$

式中: q 为斜拉索单位长度自重; H_0 为水平拉力。

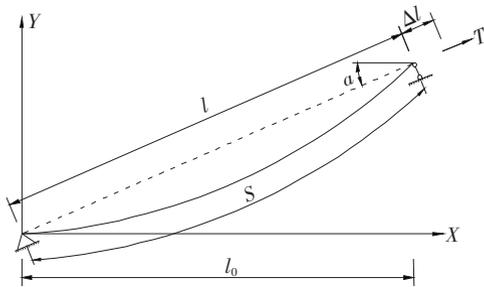


图 1 斜拉索的线形和基本参数

求解微分方程(2),并引入适当的边界条件,可获得悬链线方程为:

$$y = \frac{l_0}{\lambda} \left[\cosh\left(\frac{\lambda x}{l_0} + c\right) - \cosh c \right] \quad (3)$$

式中: $\lambda = \frac{ql_0}{H_0}$; $c = \operatorname{arcsinh} \left[\frac{\lambda \tan \alpha}{2 \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right] - \frac{\lambda}{2}$; α 为两个端点连线的倾角。

利用悬链线方程进行积分,可获得斜拉索的长度 S 为:

$$S = \sqrt{l_0^2 \tan^2 \alpha + 2 \left(\frac{l_0}{\lambda}\right)^2 (\cosh \lambda - 1)} \quad (4)$$

斜拉索上端点的轴向拉力 T 可表示为:

$$T = \frac{1}{2} H_0 \sqrt{\lambda^2 \tan^2 \alpha + 4 \sinh^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \coth\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot H_0 \lambda \tan \alpha \quad (5)$$

跨中垂度 f 可表示为:

$$f = \frac{S}{2} \tanh\left(\frac{\lambda}{4}\right) \quad (6)$$

4 斜拉索等效弹性模量计算方法

基于悬链线线形,首先建立斜拉索轴向拉力与克服垂度的伸长量之间的关系,获得垂度效应的当量弹性模量;然后与斜拉索钢丝的弹性模量进行合并,可获得斜拉索的等效弹性模量,即:

$$E_{eq} = \frac{\sigma}{\epsilon_e + \epsilon_f} = \frac{\sigma}{\frac{\sigma}{E_e} + \frac{\sigma}{E_f}} = \frac{E_e}{1 + \frac{E_e}{E_f}} \quad (7)$$

式中: ϵ_e 为斜拉索弹性应变; ϵ_f 为斜拉索克服垂度引起的伸长对应的当量应变; E_f 为垂度效应的当量弹性模量。

用弹性模量的概念表示斜拉索垂度的影响,则 E_f 可表示为:

$$E_f = -\frac{dT}{d\Delta l} \cdot \frac{l}{A} \quad (8)$$

其中:

$$\Delta l = S - l \quad (9)$$

式中: Δl 为斜拉索垂度引起的索长; l 为斜拉索上下两端点之间的距离。

关于垂度效应的当量弹性模量 E_f 的计算,该文提出两种计算方法:数值算法和简化公式算法。

4.1 数值算法

在求解 $\frac{dT}{d\Delta l}$ 时可用数值的方法。以斜拉索水平拉力 H_0 为变量,使其以较小的增幅变化,利用式(5)和式(9)分别求出对应的 T_i 和 Δl_i ,则有:

$$\frac{dT}{d\Delta l} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta l_{i+1} - \Delta l_i} \quad (10)$$

将式(10)代入式(8)即可求出当量弹性模量 E_f ,然后代入式(7)即可求出斜拉索等效弹性模量 E_{eq} ,具体计算流程如图 2 所示。该方法用到的公式没有经过简化,只要计算时 H_0 的增幅足够小,其结果就趋近于精确解。

然而,对于已知拉索上端轴向拉力 T 或拉索应力 σ 的情形,即类似于 Ernst 公式的已知条件,该方法应用起来不太方便,因此有必要提出简化公式算法。

4.2 简化公式算法

基本思路:将 λ 表示成 T 的函数,代入 Δl 的表达式,从而将 Δl 表示成 T 的函数,最后对 T 求导。

将 $\cosh \lambda$ 表达为麦克劳林级数展开式,取前 5 项

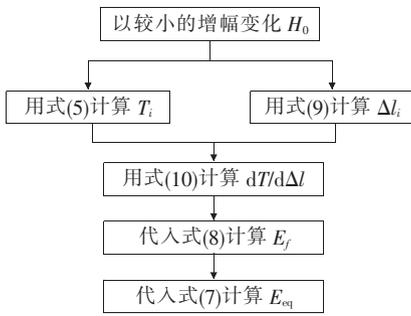


图 2 基于非弹性悬链线理论的数值算法计算流程

近似得:

$$\cosh \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \approx 0.5 \left[\sum_{i=0}^4 \frac{\lambda^i}{i!} + \sum_{i=0}^4 \frac{(-\lambda)^i}{i!} \right] = 1 + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^4}{24} \quad (11)$$

代入式(4), 可得:

$$S = l_0 \operatorname{seca} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{12}} \approx l_0 \operatorname{seca} \left(1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{24} \right) \quad (12)$$

代入式(9), 可得:

$$\Delta l = S - l = \frac{l_0 \cos \alpha}{24} \lambda^2 \quad (13)$$

在式(5)中, 可令:

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 \tan^2 \alpha + 4 \sinh^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)} \quad (14)$$

其中:

$$4 \sinh^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) = 4 \left(\frac{e^{\lambda/2} - e^{-\lambda/2}}{2} \right)^2 = e^\lambda + e^{-\lambda} - 2 \approx \lambda^2 +$$

$$\frac{1}{12} \lambda^4 \quad (15)$$

代入式(14), 可得:

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha) \lambda^2 + \frac{1}{12} \lambda^4} = \frac{1}{2} \lambda \cdot$$

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{12} \lambda^2} \approx \frac{\lambda}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{24} \cdot \lambda^2 \right) \quad (16)$$

又有:

$$\coth \left(\frac{\lambda}{2} \right) \approx \frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \quad (17)$$

将式(16)、(17)代入式(5), 可得:

$$T \approx \frac{q l_0}{2 \cos \alpha} \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{24} \lambda^2 \right) \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \right) + \frac{q l_0}{2} \tan \alpha \approx$$

$$a_{-1} \frac{1}{\lambda} + a_0 + a_1 \lambda \quad (18)$$

$$\text{其中: } a_{-1} = \frac{q l_0}{\cos \alpha}; a_0 = \frac{q l_0}{2} \tan \alpha; a_1 = \frac{q l_0}{12 \cos \alpha} +$$

$$\frac{q l_0 \cos \alpha}{24}.$$

由式(18)可得:

$$a_1 \lambda^2 + (a_0 - T) \lambda + a_{-1} = 0 \quad (19)$$

解之, 得:

$$\lambda = \frac{(T - a_0) - \sqrt{(a_0 - T)^2 - 4 a_1 a_{-1}}}{2 a_1} \quad (20)$$

代入式(13), 得:

$$\Delta l = \frac{l_0 \cos \alpha}{48 a_1^2} \left[(T - a_0)^2 - 2 a_1 a_{-1} - (T - a_0) \sqrt{(T - a_0)^2 - 4 a_1 a_{-1}} \right] \quad (21)$$

对 T 求导, 可得:

$$\frac{d \Delta l}{d T} = \frac{l_0 \cos \alpha}{48 a_1^2} \left[2(T - a_0) - \frac{(T - a_0)^2}{\sqrt{(T - a_0)^2 - 4 a_1 a_{-1}}} - \sqrt{(T - a_0)^2 - 4 a_1 a_{-1}} \right] \quad (22)$$

将 $\frac{d \Delta l}{d T}$ 的倒数代入式(8), 即可求出当量弹性模量

E_f , 然后代入式(7)即可求出斜拉索等效弹性模量 E_{eq} 的简化公式:

$$E_{eq} = E_e \left\{ 1 + \frac{E_e A (\cos \alpha)^2}{48 a_1^2} \left[-2(T - a_0) + \frac{(T - a_0)^2}{\sqrt{(T - a_0)^2 - 4 a_1 a_{-1}}} + \sqrt{(T - a_0)^2 - 4 a_1 a_{-1}} \right] \right\} \quad (23)$$

5 线密度变化的影响

上述计算是基于“无弹性悬链线理论”, 即索变形前后的单位长度重量不变。然而, 当索力很大时, 索变形前后的单位长度重量变化较明显。为了研究线密度变化对等效弹性模量的影响, 该节基于“弹性悬链线理论”建立等效弹性模量的求解算法。

索受力伸长之后单位长度重量变化为:

$$q_1 = \frac{q}{1 + \bar{T} / (E_e A)} \quad (24)$$

式中: \bar{T} 为拉索的平均轴力, 按式(25)计算:

$$\bar{T} = \frac{H_0 l_0}{2 S} \left[1 + \frac{\sinh \lambda}{\lambda} + \lambda \tan^2 \alpha \coth \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right] \quad (25)$$

重新计算与 q_1 有关的下列参数:

$$a'_{-1} = \frac{q_1 l_0}{\cos \alpha} \quad (26)$$

$$a'_0 = \frac{q_1 l_0}{2} \tan \alpha \quad (27)$$

$$a'_1 = \frac{q_1 l_0}{12 \cos \alpha} + \frac{q_1 l_0 \cos \alpha}{24} \quad (28)$$

$$\lambda' = \frac{q_1 l_0}{H_0} \quad (29)$$

基于弹性悬链线理论的斜拉索长度和上端点的轴向拉力可分别表示为:

$$S' = \sqrt{l_0^2 \tan^2 \alpha + 2 \left(\frac{l_0}{\lambda'} \right)^2} (\cosh \lambda' - 1) \quad (30)$$

$$T' = \frac{1}{2} H_0 \sqrt{\lambda'^2 \tan^2 \alpha + 4 \sinh^2 \left(\frac{\lambda'}{2} \right)} \coth \left(\frac{\lambda'}{2} \right) +$$

$$\frac{1}{2} H_0 \lambda' \tan \alpha \quad (31)$$

依据 3.1 节的数值算法思路,可求出斜拉索等效弹性模量 E_{eq} 。也可建立基于弹性悬链线理论的简化公式,将 a'_{-1} 、 a'_0 、 a'_1 和 T' 分别替换式(23)中的 a_{-1} 、 a_0 、 a_1 和 T 即可。

6 工程算例

沪通长江大桥斜拉索单位长度重度 $q = 7\ 644$ N/m,横截面面积 $A = 0.078$ m²,水平投影长度 $l_0 = 544$ m,钢丝弹性模量 $E_e = 205$ GPa,两个端点连线的倾角 $\alpha = 19.29^\circ$ 。利用该文提出的数值算法和简化公式算法计算等效弹性模量,如表 1 所示。在数值算法中,水平力 H_0 的增幅为 50 kN,不足 H_0 的 0.5%。从表 1 可以看出:两种理论算出的结果很接近,说明索线密度变化对等效弹性模量的影响非常小。

将该文算法的结果(无弹性悬链线理论)与 Ernst 公式计算结果在表 2 中进行比较。

表 1 该文方法、简化公式计算的等效弹性模量(E_{eq}/E_e)

应力 σ/MPa	数值算法			简化公式		
	理论 1	理论 2	误差/%	理论 1	理论 2	误差/%
200	0.121	0.120	0.59	0.121	0.121	0.16
250	0.219	0.218	0.42	0.218	0.219	0.18
300	0.332	0.331	0.29	0.332	0.332	0.19
350	0.446	0.445	0.19	0.446	0.446	0.18
400	0.549	0.549	0.12	0.549	0.550	0.17
450	0.637	0.637	0.07	0.637	0.638	0.16
500	0.708	0.708	0.04	0.708	0.709	0.14
550	0.765	0.765	0.02	0.765	0.766	0.12
600	0.810	0.809	0.01	0.809	0.810	0.11
650	0.844	0.844	0.00	0.844	0.845	0.10
700	0.872	0.872	-0.01	0.872	0.873	0.09

注:理论 1、2 分别为无弹性悬链线理论、弹性悬链线理论。

从表 2 可以看出:① Ernst 公式对于低应力水平的斜拉索精度不高,如应力为 200 MPa 时,误差高达 17.29%;随着应力的增大,误差逐渐减小,这在一定程度上证明了该文方法的正确性;② 该文的简化公式算法精度非常高,误差不超过 0.3%,精度远高于 Ernst 公式;③ Ernst 公式计算结果高于数值解,而该文的简化公式计算结果略低于数值解;④ 由于垂度效应的影响,等效弹性模量 E_{eq} 小于钢丝弹性模量 E_e , E_{eq}/E_e 的值随斜拉索应力水平的增大而增大。

表 2 斜拉索等效弹性模量计算结果

应力 $\sigma/$ MPa	水平力 H_0/MN	跨中垂 度/m	E_{eq}/E_e			误差/%	
			数值算法 (A)	简化公式 (23)(B)	Ernst 公式 (C)	$(B-A)/A$	$(C-A)/A$
200	13.9	21.6	0.121	0.121	0.142	-0.24	17.29
250	17.6	17.0	0.219	0.218	0.243	-0.20	11.23
300	21.3	14.1	0.332	0.332	0.357	-0.16	7.53
350	25.0	12.0	0.446	0.446	0.469	-0.12	5.13
400	28.7	10.4	0.549	0.549	0.569	-0.09	3.54
450	32.4	9.2	0.637	0.637	0.653	-0.07	2.48
500	36.1	8.3	0.708	0.708	0.721	-0.05	1.76
550	39.8	7.5	0.765	0.765	0.775	-0.04	1.27
600	43.5	6.9	0.810	0.809	0.817	-0.03	0.94
650	47.2	6.3	0.844	0.844	0.850	-0.02	0.70
700	50.9	5.9	0.872	0.872	0.877	-0.02	0.53

如果把斜拉索水平投影长度 l_0 也作为变量,可计算获得等效弹性模量 E_{eq} 随 l_0 的变化曲线,如图 3 所示。

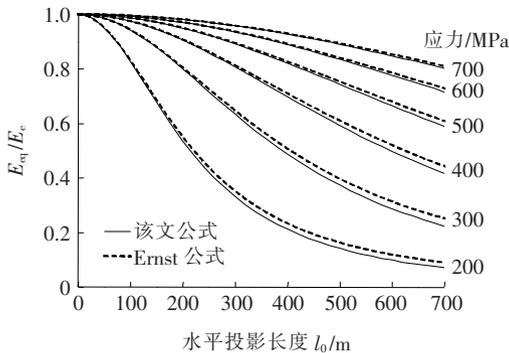


图 3 E_{eq} 与 l_0 的关系

从图 3 可以看出:① 在变化趋势方面,该文公式与 Ernst 公式基本一致,再次证明了该文方法的正确性;② 等效弹性模量 E_{eq} 随 l_0 的增大而减小,因此对于大跨度斜拉桥的超长索,垂度效应导致刚度显著折减。

7 结论

该文基于斜拉索的真实线形建立了考虑垂度效应的等效弹性模量的数值算法和简化公式,并采用沪通长江大桥最长斜拉索作为算例,对比分析了该文方法与传统 Ernst 公式的计算精度,得到以下结论:

(1) 在高应力水平下,该文方法与 Ernst 公式计算结果非常接近;在等效弹性模量 E_{eq} 随水平投影长度 l_0 变化的趋势上,该文方法与 Ernst 公式基本一致。证明了该文方法的正确性。

(2) Ernst 公式对于低应力水平的斜拉索精度不高,如应力为 200 MPa 时,误差高达 17.29%;随着应力的增大,误差逐渐减小到 1% 以内。

(3) 该文的简化公式算法误差不超过 0.3%,精度高于 Ernst 公式,适合推广应用。

(4) Ernst 公式计算结果高于数值解,而该文的简化公式计算结果略低于数值解。

(5) 由于垂度效应的影响,等效弹性模量 E_{eq} 小于钢丝弹性模量 E_e , E_{eq}/E_e 的值随斜拉索应力水平的增大而增大。

(6) 等效弹性模量 E_{eq} 随水平投影长度 l_0 的增大而减小,因此对于大跨度斜拉桥的超长索,垂度效应导致刚度显著折减。

(7) 索受力前后线密度的变化对等效弹性模量的影响很小,可忽略不计。

参考文献:

- [1] Sham S H R, Wyatt T A. Construction Aerodynamics of Cable-Stayed Bridges for Record Spans: Stonecutters Bridge[J]. Structures, 2016, 8(1): 94-110.
- [2] 高宗余,梅新咏,徐伟,等.沪通长江大桥总体设计[J].桥梁建设, 2015(7).
- [3] JTG/T D65-01-2007 公路斜拉桥设计细则[S].
- [4] Ernst H J. The E-Module of Rope with Consideration of the Dip[J]. The Civil Engineering, 1965, 40(1): 52-55.
- [5] 刘平,许慧,璆玮.大跨度斜拉索自重下的垂度分析[J].公路交通科技, 2016(3).
- [6] 张晔芝,刘剑光,张晓龙.几何非线性对沪通公铁两用长江大桥的影响[J].铁道科学与工程学报, 2015(6).
- [7] 张敏,高宗余,陈佳,等.千米跨度公铁两用钢桁梁斜拉桥几何非线性研究[J].桥梁建设, 2014(5).
- [8] 洪显诚,刘志英.精确的斜拉索等效弹性模量公式的推导[C].全国桥梁结构学术大会论文集, 1992.
- [9] Hajdin N, Michaltsos G T, Konstantakopoulos T G. About the Equivalent Modulus of Elasticity of Cables of Cable-Stayed Bridges[J]. The Scientific Journal Facta Universitatis, 1998, 11(5): 569-575.
- [10] 李国平.斜拉索非线性分析的状态修正法[J].同济大学学报, 2000(1).
- [11] 夏桂云,李传习,张建仁.斜拉索非线性分析[J].长沙交通学院学报, 2001(1).
- [12] Vairo G. A Closed-Form Refined Model of the Cables' Nonlinear Response in Cable-Stayed Structures[J]. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2009, 16(7): 456-466.
- [13] Vairo G, Montassar S. Mechanical Modelling of Stays under Thermal Loads[J]. Springer Berlin Heidelberg, 2012, 61(61): 481-498.
- [14] 王立彬,王达,吴勇.损伤拉索的等效弹性模量及其参数分析[J].计算力学学报, 2015(3).
- [15] 郑丽凤.架空索道悬链线理论研究[D].福建农林大学硕士学位论文, 2002.
- [16] 邵旭东.桥梁工程[M].4版.北京:人民交通出版社, 2016.