

改进的无单元 Galerkin 方法在沥青路面 动态响应中的应用

彭妙娟, 付杨

(上海大学 土木工程系, 上海市 200444)

摘要: 基于改进的无单元 Galerkin 方法,建立了三维沥青路面弹性动力学计算模型。对路面结构在匀速移动荷载作用下的动力响应进行了分析,得到了沥青路面各层的竖向位移、应力和最大剪应力的时程曲线,并将改进的无单元 Galerkin 方法计算结果和有限元数值模拟结果进行了对比;同时研究了不同车速下路面应力和位移响应的变化规律。结果表明:改进的无单元 Galerkin 方法在路面动力响应分析中是有效的;沥青面层表面的位移、压应力及剪应力最大;基层底部的拉应力最大;较高的车速可以减小沥青路面结构内部的动力响应。

关键词: 道路工程;改进的移动最小二乘法;改进的无单元 Galerkin 方法;三维沥青路面;弹性动力学;动力响应

无网格方法是近年来快速发展的数值方法,由于该类方法的计算基于节点而非网格,因而在对大变形、断裂、爆炸等问题进行研究时具有一定优势,现在已成为计算力学领域的研究热点。

无网格方法主要有无单元 Galerkin 方法、无网格局部法、径向基函数法、自然单元法,其中无单元 Galerkin (Element-Free Galerkin, EFG) 方法是使用最普遍的无网格方法之一, EFG 方法采用移动最小二乘法建立逼近函数,但计算量相比有限元较大。程玉民等基于移动最小二乘法,提出了改进的移动最小二乘法,并以此为基础,建立了改进的无单元 Galerkin (Improved Element-Free Galerkin, IEFG) 方法,并将其应用到势问题、瞬态热传导、波动方程、弹性力学和弹性动力学、断裂力学、黏弹性力学,由于改进的移动最小二乘法形成的方程组易于求解且不会形成病态方程组,因而 IEFG 方法比 EFG 方法具有更高的计算精度和计算效率。

姚莉莉等基于变分原理,将温度荷载与车辆荷载进行耦合,并利用无网格方法计算分析了路面结构的温度场和应力场;李荣鑫等利用 EFG 方法模拟了沥青路面的力学行为,对沥青路面的车辙进行了分析;彭妙娟,席伟成等利用 IEFG 方法,通过设置不同的节点数

量和影响域比例参数,对机场复合道面的位移和应力进行了分析;邹诗莹等将断裂力学和 IEFG 方法结合,分析了机场复合道面的反射裂缝。

目前,国内外在求解沥青路面动力响应时,使用有限元方法较多,而将无网格方法应用到路面动力响应的相关研究还较少。因此使用改进的无单元 Galerkin 方法对沥青路面动态响应的研究非常必要。

该文建立三维沥青混凝土路面分析模型,基于三维弹性动力学问题的 IEFG 方法对沥青路面结构的动力响应进行计算,并对路面结构不同深度的动力响应及位移进行分析。

1 改进的移动最小二乘法

在改进的移动最小二乘法中,逼近函数 $u^h(x)$ 的形式为:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = p^T(x) \cdot a(x) \quad (x \in \Omega) \quad (1)$$

式中: m 为基函数个数; $p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ 为基函数; $a_i(x)$ 为相应的系数。

在点 x 邻域内的局部逼近函数为:

收稿日期:2019-12-10(修改稿)

基金项目:国家自然科学基金委员会-中国民航局民航联合基金资助项目(编号:U1433104)

作者简介:彭妙娟,女,博士,教授,博士生导师。E-mail: mjpeng@shu.edu.cn

$$u^h(x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{x}) \cdot a_i(x) = p^T(\bar{x}) \cdot a(x) \quad (2)$$

式中: \bar{x} 为点 x 局部邻域内的点。

定义泛函:

$$J = \sum_{I=1}^n w(x-x_I) [u^h(x, x_I) - u_I]^2 = \sum_{I=1}^n w(x-x_I) \left[\sum_{i=1}^m p_i(x_I) \cdot a_i(x) - u_I \right]^2 \quad (3)$$

式中: x_I 为点紧支域内的节点; $w(x-x_I)$ 为权函数; n 为影响域覆盖点 x 的节点数。

将式(3)用矩阵形式表示:

$$J = (Pa - u)^T W(x) (Pa - u) \quad (4)$$

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (5)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} w(x-x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w(x-x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w(x-x_n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

为使误差最小, 对 J 求一阶导数, 从而得到系数向量:

$$A(x)a(x) = B(x)u \quad (8)$$

其中:

$$A(x) = P^T W(x) P \quad (9)$$

$$B(x) = P^T W(x) \quad (10)$$

利用 Schmidt 正交化方法将基函数正交化, 例如对基函数:

$$q = (q_i) = (1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1, \dots) \quad (11)$$

正交化后的正交基函数为:

$$p_i = q_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(q_i, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k, (i=1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

为加权的正交基函数组:

$$(p_i, p_j) = 0, (i \neq j) \quad (13)$$

由式(8)~(13)可得:

$$a(x) = A^*(x)B(x)u \quad (14)$$

其中:

$$A^*(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p_1, p_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(p_2, p_2)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(p_n, p_n)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

将式(14)代入式(1), 可得:

$$u^h(x) = \bar{\Phi}(x)u = \sum_{I=1}^n \bar{\Phi}_I(x)u_I \quad (16)$$

其中 $\bar{\Phi}(x)$ 为形函数:

$$\bar{\Phi}(x) = [\bar{\Phi}_1(x), \bar{\Phi}_2(x), \dots, \bar{\Phi}_n(x)] = p^T(x) \cdot A^*(x)B(x) \quad (17)$$

2 三维弹性动力学的改进的无单元 Galerkin 方法

三维线弹性动力学的控制方程为:

$$L^T \sigma + b = \rho \ddot{u} + \mu \dot{u}_i, (x \in \Omega) \quad (18)$$

式中: L 为微分算子矩阵; σ 为应力向量; b 为外力向量; ρ 为质量密度; μ 为阻尼系数; u 为位移向量; \dot{u} 为速度向量; \ddot{u} 为加速度向量。

$$L(\cdot) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} (\cdot) \quad (19)$$

$$\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}]^T \quad (20)$$

$$b = [b_1(t), b_2(t), b_3(t)]^T \quad (21)$$

$$u = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T \quad (22)$$

$$\dot{u} = [\dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dot{u}_3(t)]^T \quad (23)$$

$$\ddot{u} = [\ddot{u}_1(t), \ddot{u}_2(t), \ddot{u}_3(t)]^T \quad (24)$$

边界条件为:

$$u = \bar{u} (x \in \Gamma_u) \quad (25)$$

$$n \cdot \sigma = \bar{t} \quad (x \in \Gamma_t) \quad (26)$$

式中: \bar{u} 为边界 Γ_u 上的已知位移; \bar{t} 为边界 Γ_t 上的已知面力; $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ 为求解域 Ω 的边界; n 为边界 Γ_t 的外法线方向余弦。

初始条件为:

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad (x \in \Omega) \quad (27)$$

$$\dot{u}(x, t_0) = v_0(x), \quad (x \in \Omega) \quad (28)$$

式中: u_0 为点 x 的初始位移; v_0 为点 x 的初始速度向量。

采用罚函数法施加位移边界条件, 可得弹性动力学的 Galerkin 积分弱形式:

$$\int_{\Omega} \delta u^T \cdot \rho \cdot \ddot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u^T \mu \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \cdot \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \cdot b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \cdot \bar{t} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_u} \delta u^T \cdot S(u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (29)$$

式中: α 为罚因子。

由弹性问题的几何方程和本构方程, 代入改进的移动最小二乘法的逼近函数式(1), 可得:

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + (K + K^a)U(t) = F(t) + F^a \quad (30)$$

其中:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega, \quad (I, J = 1, 2, \dots, M) \quad (31)$$

$$U = [u_1^T(t), u_2^T(t), \dots, u_M^T(t)]^T \quad (32)$$

$$M_{IJ} = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_I \rho \bar{\Phi}_J d\Omega \quad (33)$$

$$C_{IJ} = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_I \mu \bar{\Phi}_J d\Omega \quad (34)$$

$$F_I = \int_{\Omega} \bar{\Phi}_I b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\Phi}_I \bar{t} d\Gamma \quad (35)$$

$$K_{IJ}^a = \alpha \int_{\Gamma_u} \bar{\Phi}_I S \bar{\Phi}_J d\Gamma \quad (36)$$

$$F_I^a = \alpha \int_{\Gamma_u} \bar{\Phi}_I S \bar{u} d\Gamma \quad (37)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{I,1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Phi}_{I,2} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Phi}_{I,3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_I = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_{I,2} & \bar{\Phi}_{I,1} & 0 \\ \bar{\Phi}_{I,3} & 0 & \bar{\Phi}_{I,1} \\ 0 & \bar{\Phi}_{I,3} & \bar{\Phi}_{I,2} \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

若 x_1, x_2 或 x_3 方向有位移约束, 对应的 S_1, S_2 或 S_3 为 1, 否则为 0。

时间域 $[0, T]$ 被离散为 n 个时间步, 即 $\Delta t = \frac{T}{n}$ 。

假设在时刻 t , 位移 U_t 和对应导数 \dot{U}, \ddot{U} 的值均已知, 对 $\dot{U}_{t+\Delta t}$ 和 $U_{t+\Delta t}$ 进行二阶 Taylor 展开, 可得:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \frac{1}{2} (1 - \beta_2) \Delta t^2 \ddot{U}_t + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \ddot{U}_{t+\Delta t} \quad (41)$$

式中: β_1 和 β_2 为 Newmark 参数, 这里取 $\beta_1 = \frac{3}{2}, \beta_2 = \frac{8}{5}$ 。

令 $\alpha_1 = \frac{2}{\beta_2 \Delta t^2}, \alpha_2 = \frac{2}{\beta_2 \Delta t}, \alpha_3 = \frac{1}{\beta_2} - 1$, 由式(30)可得:

$$(\alpha_1 M + \beta_1 \alpha_2 C + K + K^a) U_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + F^a + M(\alpha_1 U_t + \alpha_2 \dot{U}_t + \alpha_3 \ddot{U}_t) + C \left[\beta_1 \alpha_2 U_t + \left(\frac{2\beta_1}{\beta_2} - 1 \right) \dot{U}_t + \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} - 1 \right) \Delta t \ddot{U}_t \right] \quad (42)$$

阻尼矩阵采用瑞利阻尼: $C = \alpha M + \beta M$, 其中 α, β 为阻尼系数。

3 三维动力学 IIEFG 方法在沥青路面动态响应中的应用

该文利用 Matlab 编制了无网格法程序, 建立了 4

层结构的路面分析模型,基于三维弹性动力学 IIEFG 方法对移动荷载作用下的路面动态响应进行了计算,具体计算流程为:

(1) 确定路面几何尺寸,输入路面材料参数。

(2) 在求解域内确定坐标系,设置节点坐标,对应编号建立节点信息。

(3) 形成用于数值积分的背景积分网格,并建立 Γ_u 和 Γ_t 的边界积分网格信息。

(4) 根据背景网格和边界生成 Gauss 积分点并计算对应 Gauss 点积分信息。

(5) 形成刚度矩阵 K ,质量矩阵 M ,阻尼矩阵 C ,全局罚函数矩阵 K^a 及列向量 F^a 。

(6) 确定车轮移动位置并计算初始位移矩阵 U_0 ,速度矩阵 \dot{U}_0 ,加速度矩阵 \ddot{U}_0 。

(7) 根据车轮移动速度,确定时间步长 Δt 及等效刚度矩阵 \hat{K} 。

(8) 进入时间步循环,计算时间 $t + \Delta t$ 的节点荷载向量 $F_{t+\Delta t}$ 。

(9) 求解并输出路面各层计算点的位移、速度、应变和应力。

(10) 返回步骤(6),计算 Δt 内车轮移动距离,确定新的荷载位置。

3.1 路面结构和参数

该文采用中国典型的半刚性沥青路面结构,路面结构及其各层材料参数见表 1。

表 1 沥青路面结构和参数

路面时间	厚度/ cm	动态压 缩模量/ MPa	泊松比 ν	密度 $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$
沥青面层	18	8 000	0.25	2 600
水泥稳定碎石	40	20 000	0.25	2 300
二灰土	20	6 000	0.25	1 900
土基	300	40	0.40	1 900

3.2 计算模型

沥青路面计算模型尺寸为:路面宽度方向 3.75 m,长度方向 8.68 m,厚度方向 3.78 m。图 1 为路面模型节点分布,总节点数为 2 304 个;共 1 736 个积分子域,各个子域均采用 3×3 阶 Gauss 积分,取影响域比例参数 $d_{\max} = 2$,罚因子为 1×10^{10} 。为提高计算精度,采用局部细化的方式划分网格,在荷载作用区附近细化。

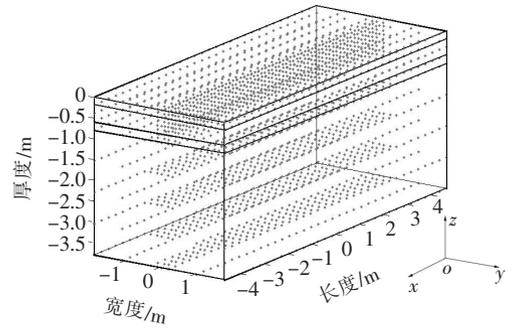


图 1 路面模型节点分布

3.3 匀速移动荷载的模拟

图 2 为移动荷载加载过程,其中,黑色部分为等效荷载,箭头为荷载移动方向。将荷载的运动路径简化为水平表面上的两条矩形条带,荷载大小取 0.7 MPa,作用面积简化为两个 $0.186 \text{ m} \times 0.28 \text{ m}$ 的矩形,轮隙带取 0.128 m,设计车速 $V = 100 \text{ km/h}$,通过调节荷载的作用时间来模拟不同的车速,为减小边界条件对结果的影响,移动荷载加载过程如图 2 所示。

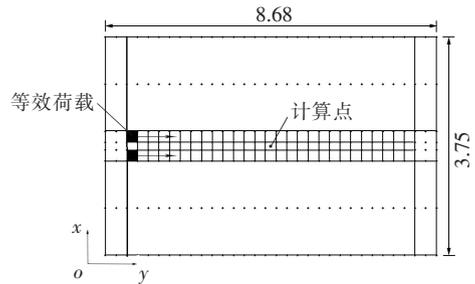


图 2 移动荷载加载过程(单位:m)

4 三维沥青路面动态响应计算结果与分析

选取路面结构中心线上的各点作为计算点,利用弹性动力学 IIEFG 方法进行计算,得到计算点在移动荷载作用下的竖向位移,并将其与有限元软件 Abaqus 的计算结果进行对比,沥青路面面层顶部计算点在移动荷载下的竖向位移比较见图 3。

从图 3 可知:IIEFG 弹性动力学方法的计算结果与有限元 Abaqus 计算结果吻合,说明了 IIEFG 动力学方法在分析沥青路面动态响应方面的有效性。

4.1 沥青路面结构层竖向位移分析

图 4 为沥青路面垂直方向各层计算点位置的竖向位移时程曲线。

从图 4 可以看出:当荷载向计算点方向移动时,计算点的竖向位移快速增大,荷载在驶离计算点时,计算

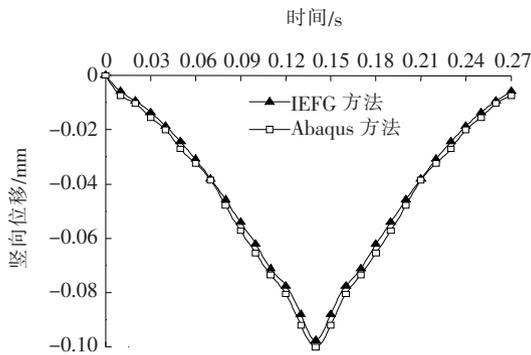


图3 面层顶部竖向位移比较

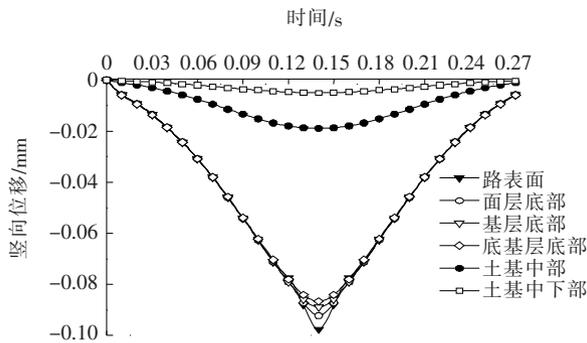


图4 各层竖向位移时程曲线

点位置各个深度的竖向位移迅速减少。在路面结构各层计算点的时程曲线中,竖向最大位移发生在沥青面层,为 0.097 5 mm,基层底部、底基层底部的竖向位移分别占沥青面层位移的 95.7% 和 93.2%;土基层顶部、中部分别占沥青面层位移的 93.2% 和 26.9%。由以上分析可知:随着深度的增大,竖向位移值不断减小,竖向位移主要发生在土基中部以上。

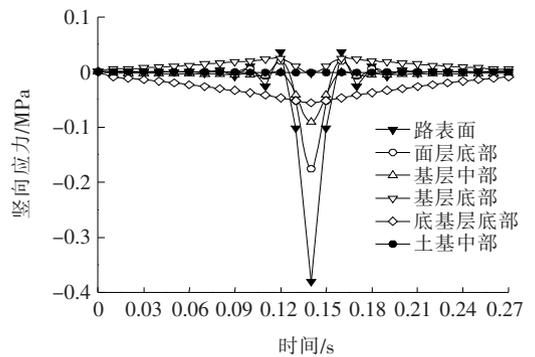
4.2 沥青路面结构层应力响应分析

图5为路面结构计算点在移动荷载作用下的竖向应力、横向应力和水平应力时程曲线。图6为最大剪应力时程曲线。

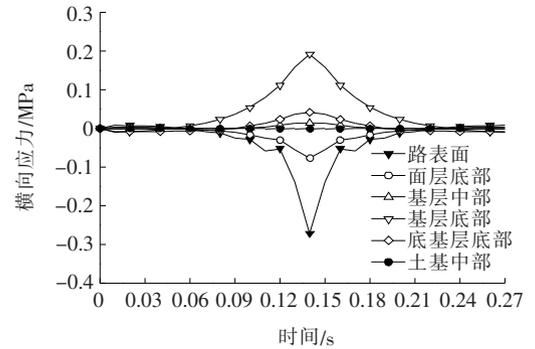
由图5可以看出:

(1) 在各计算点位的竖向应力时程曲线中,路表面承受最大压应力,大小为 0.38 MPa;面层底部应力为 0.17 MPa;在底基层底部计算点位置,压应力值为 0.08 MPa;随着深度增加,土基中的应力值逐渐趋近于零。由以上分析可知:随着深度的增大,竖向应力减小,路面表面层承受了较大的压应力,易产生破坏。

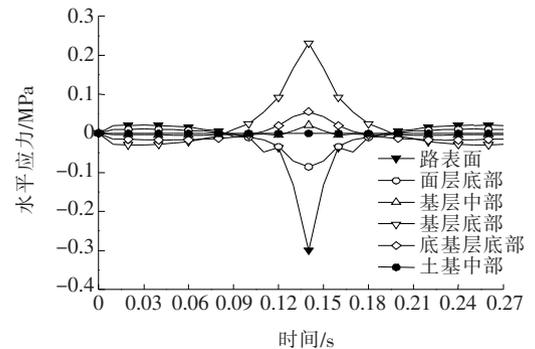
(2) 路面结构的横向应力时程曲线和水平应力时程曲线的变化趋势基本一致,其中拉应力和压应力都有,并随深度增加呈交替变化。两个方向的最大压应力均出现在路表面,大小分别为 0.27、0.30 MPa;随着



(a) 竖向应力



(b) 横向应力



(c) 水平应力

图5 沥青路面结构层应力响应时程曲线

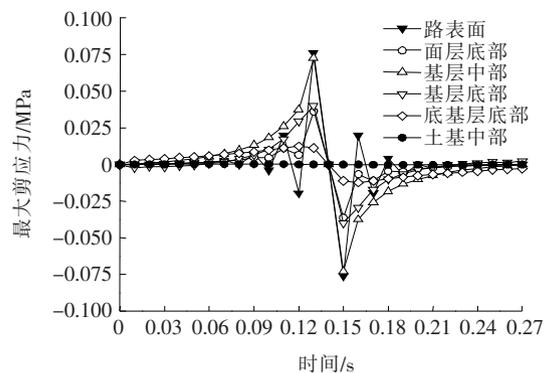


图6 最大剪应力时程曲线

深度的增加,两个方向的压应力均在面层快速减小,并在基层中由压应力转化为拉应力,两个方向最大拉应力均发生在基层和底基层的接触面,其值分别为

0.19、0.23 MPa,从基层底部到土基中部,随深度的增加,两个方向的拉应力均逐渐减小,且在底基层的中上部,拉应力减小幅度最大,土基顶面拉应力值均为 0.05 MPa。通过以上分析可得:在匀速荷载作用下,路面结构受力最为不利的位置分别为沥青面层表面和基层底部。

图 6 为在移动荷载作用下最大剪应力时程曲线。

由图 6 可以看出:在移动荷载作用下,沥青面层剪应力最大,为 0.076 MPa,从面层底部到基层底部,剪应力逐渐增大,底基层和土基中的剪应力较小。由以上分析可知:路表面产生的剪应力最大,所以路表面层易产生剪切破坏。

5 不同速度下路面结构中最不利应力分析

通过以上对移动荷载作用下路面结构的应力分析可知:最不利受力位置分别为沥青面层表面和基层底部,而由于汽车在公路上行驶时,不同路段的行驶速度可能不同,因此该文分析在不同行驶速度下,沥青面层压应力和基层底部拉应力的变化规律。

图 7 为不同车速下的沥青面层最大竖向应力,图 8 为不同车速下的底基层底部最大横向拉应力,图 9 为不同车速下的底基层底部最大水平拉应力,图 10 为不同车速下的沥青面层最大竖向位移。

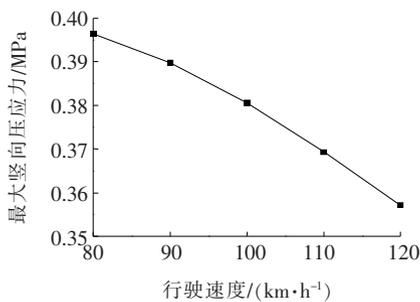


图 7 不同车速下的沥青面层最大竖向应力

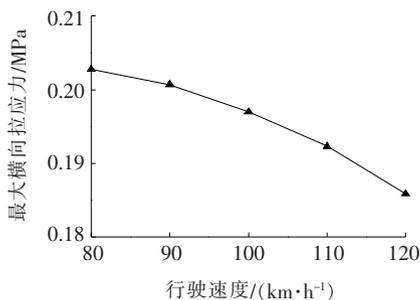


图 8 不同车速下的底基层底部最大横向拉应力

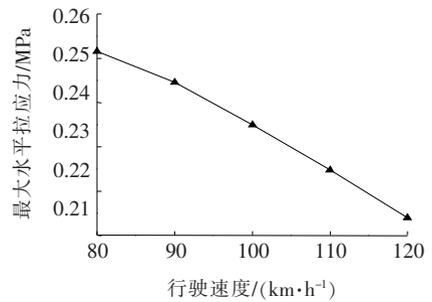


图 9 不同车速下的底基层底部最大水平拉应力

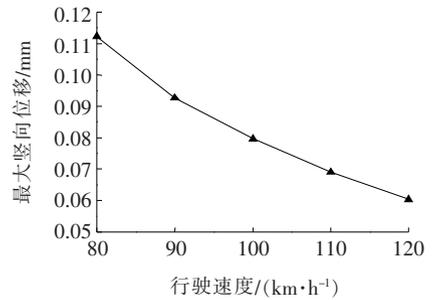


图 10 不同车速下的沥青面层最大竖向位移

由图 7~10 可以看出:路面结构的最不利应力和路表竖向位移均随车速的增大而逐渐减小,且最不利应力的减小速度,随速度的增大而加快,而最大竖向位移的减小速度,随速度的增大而减小。从以上分析可知:车速对沥青路面的应力和位移均有影响,且对应力的影响较位移的影响大。由此可见,低速行驶对路面的损害较大。

6 结论

运用改进的无单元 Galerkin 方法,建立了三维沥青路面弹性动力学计算模型。对路面结构在匀速移动荷载作用下的动力响应进行了分析,得出以下结论:

(1) 将弹性动力学改进的无单元 Galerkin 方法应用于三维沥青路面的动态响应分析,并和有限元的结果进行了对比,计算结果吻合,说明了 IIEFG 方法在三维沥青路面动力响应分析中的有效性。

(2) 路面结构在移动荷载作用下的动态响应中,最大位移发生在沥青面层表面,随着深度的增大,竖向位移值不断减小,计算结果表明:竖向位移主要发生在土基中部以上,所以提高该结构层压实度能有效降低竖向位移。

(3) 沥青面层表面承受着竖直方向的最大压应力,面层和基层中的压应力随深度增加快速减小;基层底部的横向和水平方向的拉应力最大,由此可见基层

与底基层结合处,最容易发生破坏。

(4) 沥青面层表面产生的剪应力最大,因此增大沥青面层材料的抗剪强度,可防止沥青面层表面发生剪切破坏。

(5) 路面结构的最不利应力,以及路表的最大竖向位移,均随车速的增大而逐渐减小,说明低速行驶对路面的损害较大,行车速度的提高可以减小动态响应的峰值,减轻路面的破坏。

(6) 目前无网格方法在实际工程中应用较少,将改进的无单元 Galerkin 方法应用到三维沥青路面的弹性动力学的分析中,说明无网格方法在工程中的应用前景广阔。

参考文献:

- [1] Cheng YM, Wang WQ, PENG MJ, et al. Mathematical Aspects of Meshless Methods[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014; 1-4.
- [2] Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-Free Galerkin Methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37: 229-256.
- [3] Gavete L, Falcon S, Ruiz A. An Error Indicator for the Element-Free Galerkin Method[J]. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2001, 20: 327-341.
- [4] Gavete L, Guesta JL, Ruiz A. A Procedure for Approximation of the Error in the EFG Method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53: 677-690.
- [5] Gavete L, Gavete ML. A Posteriori Error Approximation in EFG Method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 58: 2 239-2 263.
- [6] Atluri S N, Zhu T L. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Approach for Solving Problems in Elasto-Statics[J]. *Computational Mechanics*, 2000, 25: 169-179.
- [7] 戴保东,程玉民. 势问题的径向基函数——局部边界积分方程方法[J]. *物理学报*, 2007(2).
- [8] 董轶,马永其,冯伟. 弹性力学的杂交自然单元法[J]. *力学学报*, 2012(3).
- [9] SC Kang, HM Koh, JF Choo. An Efficient Response Surface Method Using Moving Least Squares Approximation for Structural Reliability Analysis[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, 25(4): 365-371.
- [10] 程玉民. 移动最小二乘法研究进展与述评[J]. *计算机辅助工程*, 2009(2).
- [11] 程玉民,陈美娟. 弹性力学的一种边界无单元法[J]. *力学学报*, 2003(2).
- [12] 陈美娟,程玉民. 改进的移动最小二乘法[J]. *力学季刊*, 2003(2).
- [13] Zhang Z, Zhao P, Liew KM. Analyzing Three-Dimensional Potential Problems with the Improved Element-Free Galerkin Method[J]. *Computational Mechanics*, 2009, 44(2): 273-284.
- [14] Zhang Z, Wang JF, Cheng YM, et al. The Improved Element-Free Galerkin Method for Three-Dimensional Transient Heat Conduction Problems[J]. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2013, 56(8): 1 568-1 580.
- [15] 程荣军,程玉民. 带源参数的热传导反问题的无网格方法[J]. *物理学报*, 2007(10).
- [16] 程荣军,程玉民. 带源参数的二维热传导反问题的无网格方法[J]. *力学学报*, 2007(6).
- [17] Zhang Z, Li DM, Cheng YM, et al. The Improved Element-Free Galerkin Method for Three-Dimensional Wave Equation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, 28(3): 808-818.
- [18] Zhang Z, Liew KM. Improved Element-Free Galerkin Method (IEFG) for Solving Three-Dimensional Elasticity Problems[J]. *Interaction and Multiscale Mechanics*, 2010, 3(2): 123-143.
- [19] Zhang Z, Hao SY, Liew KM, et al. The Improved Element-Free Galerkin Method for Two-Dimensional Elastodynamics Problems[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, 37(12): 1 576-1 584.
- [20] Zhang Z, Liew KM, Cheng YM, et al. Analyzing 2D Fracture Problems with the Improved Element-Free Galerkin Method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32(3): 241-250.
- [21] Peng MJ, Li RX, Cheng YM. Analyzing Three-Dimensional Viscoelasticity Problems Via the Improved Element-Free Galerkin (IEFG) Method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2014, 40(1): 104-113.
- [22] 姚莉莉,王选仓. 基于无网格法的沥青路面三维瞬态温度场和车辆荷载耦合[J]. *公路交通科技*, 2011(11).
- [23] 李荣鑫,彭妙娟. 无单元 Galerkin 方法在沥青混凝土路面车辙分析中的应用[J]. *公路*, 2012(1).
- [24] 彭妙娟,席伟成. 改进的 Galerkin 方法在机场复合道面中的应用[J]. *计算机辅助工程*, 2016(2).
- [25] 邹诗莹,席伟成. 运用改进的无单元 Galerkin 方法分析机场道面断裂力学问题[J]. *物理学报*, 2017(12).