

荷载横向作用位置对偏心荷载分解法影响分析

李夏元^{1,2}, 万水^{1*}, Y.L. Mo²

(1.东南大学 交通学院, 江苏 南京 210096; 2.Civil and Environmental Engineering, University of Houston)

摘要:为改善单箱单室薄壁箱形梁在横向任意荷载作用下偏心荷载分解法的局限性,基于控制变量原则,设计了不同横向荷载作用位置($e=ab$)下偏心荷载分解法的影响参数:箱形梁宽跨比 b/L 、高跨比 H/L 、高宽比 H/b 、顶板厚度与腹板厚度比 t_o/t_w ,利用 Abaqus 有限元软件建立不同参数下的有限元模型,分析了上述因素对偏心荷载分解法的影响。结果表明:箱形梁宽跨比 b/L 、高跨比 H/L 、高宽比 H/b 对偏心荷载分解法的影响可以忽略不计,顶板厚度与腹板厚度比 t_o/t_w 对偏心荷载分解法起主要影响,反对称荷载系数 k 随着顶板厚度与腹板厚度比 t_o/t_w 的增大而减小。提出了考虑顶板厚度与腹板厚度比 t_o/t_w 影响的反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 之间的简化计算方法,解决了荷载横向作用位置对偏心荷载分解法的影响,有助于箱形梁空间效应理论的广泛应用。

关键词: 偏心荷载分解法; 荷载横向位置; 有限元分析; 反对称荷载系数 k ; 偏心距系数 α

1 前言

薄壁箱梁截面因其抗弯、抗扭性能好,广泛应用于桥梁结构。近年来,随着预应力技术在桥梁领域的发展与应用,箱梁截面大量采用腹板间距较大的宽箱形式。结构承受车轮荷载作用时,荷载多偏离箱形梁扭转中心,箱形梁将发生截面扭转,而宽箱截面因其箱室较宽,偏心距大,扭转效应更为明显。文献[2]表明箱形梁在扭转过程中,由刚性扭转和截面畸变产生的纵向翘曲应力可达到纵向总应力的 24%~26%。薄壁箱梁因偏心布置的汽车荷载而产生的附加翘曲应力在活载总应力中占有较大的比例,已成为大跨箱梁桥设计计算中必须考虑的问题。

近年来,关于横向偏心荷载作用下箱形梁的力学性能研究主要分为有限单元法和理论解析法。有限单元法随着计算机的发展而迅速发展,在土木工程中应用越来越广泛,但不易对箱形梁的工作性能获得明确的物理概念,对于参数分析与方案选择无法给出直观说明;理论解析法的主要思路是:箱形梁在偏心荷载作用下,根据线弹性叠加原理,将荷载分解为正对称荷载

与反对称荷载分别进行计算,然后两者叠加,偏心荷载分解法概念明确,适用于横截面任意荷载作用的情况。尽管偏心荷载分解法存在诸多优势,但当前文献在介绍偏心荷载分解时,均基于力的平移定理,偏心荷载分解与截面参数无关,只与偏心距有关,忽略了腹板刚度对顶板的约束情况,这与实际情况存在一定的偏差。荷载横向作用位置变化对偏心荷载分解法的影响因素研究尚未见报导。目前,国内外学者针对箱形梁空间效应理论(剪力滞、扭转和畸变)进行了大量的试验和理论研究,并取得了一定的成果,而相关研究的发展都是基于特殊的力学加载模式下开展的——外荷载以各种形式作用于箱梁腹板上,具有工程应用的局限性,荷载横向作用位置对偏心荷载分解法影响的研究恰恰能够解决这样的局限性,拓宽理论的适用范围,对工程实际具有重要的指导意义和现实意义。

该文以单箱单室薄壁混凝土箱形梁为研究对象,理论论证当前偏心荷载分解法的局限性。依托 Abaqus 有限元数值分析软件,选取箱形梁顶板厚度、腹板厚度、梁宽、梁高等因素进行参数化建模,基于控制变量原则,分析横向荷载作用位置对偏心荷载分解法的影响,提出任意横向位置下偏心荷载分解的简化

收稿日期:2018-10-14

基金项目:中国国家留学基金管理委员会资助项目(编号:201606090145)

作者简介:李夏元,男,博士研究生.E-mail:lixia Yuan123@163.com

*通信作者:万水,男,博士,教授,博士生导师.E-mail:lanyu421@163.com

计算方法。

2 横向偏心荷载分解法理论分析

文献[11]给出如图 1 所示的偏心荷载分解模式,分解思路:作用于箱梁顶板的偏心荷载 P ,根据力的平移定理,将偏心荷载 P 平移到箱形梁的扭转中心,外加一个扭矩 $P \cdot e$ 。作用于扭转中心的集中力 P 和扭矩 $P \cdot e$ 可以分解成正对称荷载和反对称荷载,相邻腹板的合力可以等效成外荷载 F_1 、 F_2 。

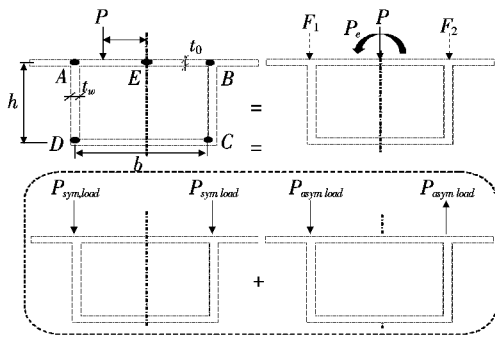


图 1 偏心荷载分解示意图

由图 1 可列出横向偏心荷载分解下 F_1 、 F_2 、 $P_{sym,load}$ (对称荷载)、 $P_{asym,load}$ (反对称荷载) 这 4 个未知分量的力的平衡方程:

$$\begin{cases} P_{sym,load} + P_{asym,load} = F_1 \\ P_{sym,load} - P_{asym,load} = F_2 \\ F_1 + F_2 = P \end{cases} \quad (1)$$

由式(1)可得:

$$P_{sym,load} = \frac{P}{2}$$

$$P_{asym,load} = F_1 - \frac{P}{2} = -F_2 + \frac{P}{2}$$

由于未知数数量超过平衡方程数目,文献[11]增设一个力矩平衡方程:

$$\begin{aligned} P_{asym,load} \cdot b &= P \cdot \alpha b \\ P_{asym,load} &= \alpha P \end{aligned} \quad (2)$$

现论证式(2)的合理性。 F_1 、 F_2 可表示为:

$$F_1 = \frac{P}{2} + P\alpha = P\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \quad (3)$$

$$F_2 = \frac{P}{2} - P\alpha = P\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \quad (4)$$

其中: $0 \leq \alpha \leq 0.5$ 。

比较 F_1 、 F_2 的值,可以发现,偏心荷载分解法的结果与两端简支约束下的内力分配一致,如图 2 所示。

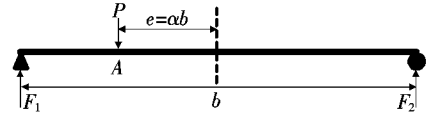


图 2 等效简支梁示意图

上述结论表明:传统偏心荷载分解法忽略了腹板刚度对顶板的约束情况,仅仅以简支约束代替,实际上腹板刚度对顶板存在着约束作用。因此,仅仅用简支约束来代替边界条件是不合理的,即式(2)的假设有待商榷。

由式(1)结论可知:偏心荷载分解得到的正对称荷载 $P_{sym,load}$ 值恒定为 $P/2$,与外荷载横向作用位置以及截面参数无关,而反对称的荷载值 $P_{asym,load}$ 与偏心荷载各腹板力 F_1 、 F_2 的分配有关,当偏心荷载作用于 A 时(即 $\alpha = 0.5$),反对称荷载值 $P_{asym,load}$ 恒定为 $P/2$,与截面参数无关。

3 研究方案确定

由式(1)可知:横向荷载作用位置的变化对正对称荷载的取值没有影响($P_{sym,load} = P/2$),仅影响反对称荷载的取值,这是由边界条件决定的。横向荷载作用位置对偏心荷载分解法的影响主要表现在相邻腹板荷载的分配,最终反应到反对称荷载 $P_{asym,load}$ 的力的分配。因此,为研究横向荷载作用位置对偏心荷载分解法的影响,可通过研究横向荷载作用位置对反对称荷载 $P_{asym,load}$ 力的分配影响来实现。正对称荷载下结构的反应可用弯曲应力 $\sigma_{sym,w}$ 表示,而反对称荷载下结构的反应可用扭转畸变翘曲应力 $\sigma_{asym,w}$ 表示,偏心荷载下的纵向总应力可用 σ_{Pw} 来表示。三者之间必然满足:

$$\sigma_{Pw} = \sigma_{sym,w} + \sigma_{asym,w} \quad (5)$$

根据图 1 所示的偏心荷载分解图,利用 Abaqus 有限元软件分别建立偏心荷载 P ($\alpha = 0.25, 0.375, 0.5$)、正对称荷载 $P_{sym,load} = P/2$ 、反对称荷载 $P_{asym,load} = P/4$ 共 3 种加载工况下的有限元模型。式(1)中, $P_{asym,load}$ 荷载值是未知的,选取 $P_{asym,load} = P/4$,可以利用式(6)得到横向任意荷载作用下,反对称荷载 $P_{asym,load}$ 与偏心荷载 P 之间的数值关系 k ,绘制 k 的横向影响线,提出反对称荷载系数 k 的简化计算方法。

$$k = \frac{\sigma_{Pw} - \sigma_{sym,w}}{\sigma_{asym,w}} \cdot \frac{4}{P} \quad (6)$$

3.1 截面参数

选取跨度为 2.5 m 的单箱单室薄壁箱梁为基准模型,模型截面尺寸见图 3,材料的弹性模量 $E=3.45 \times 10^4$ MPa,泊松比 $\nu=0.2$ 。力学加载模式为跨中截面分别作用图 1 所示的偏心荷载 $P=25$ kN、正对称荷载 $P/2=12.5$ kN 以及反对称荷载 $P_{asym,load}=25/4$ kN。

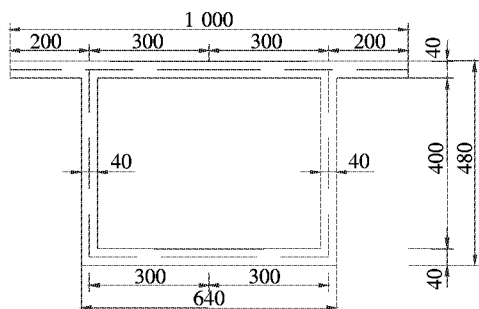


图 3 薄壁箱梁横截面图(单位:mm)

以箱形梁顶板厚度 t_0 、梁宽 b 、梁高 H 等参数作为变量,基于控制变量原则,利用 Abaqus 有限元软件对上述力学加载模式分别进行三维数值建模分析(图 4~6)。

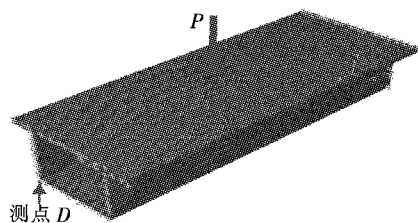


图 4 偏心荷载加载模式

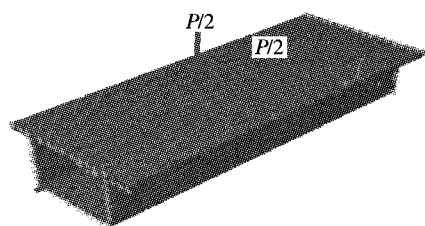


图 5 对称荷载加载模式

3.2 测点选取

文献[14]表明:正对称荷载作用下,加载点截面底板出现正剪力滞,箱形梁弯曲正应力最大值出现在底板角点 D 处;文献[11]、[13]表明:反对称荷载作用下扭转和畸变翘曲正应力最大值出现在箱形梁底板角点 D 处。因此,选取 D 点作为研究对象,绘制箱形梁角点 D 处纵向应力沿梁轴的变化规律。

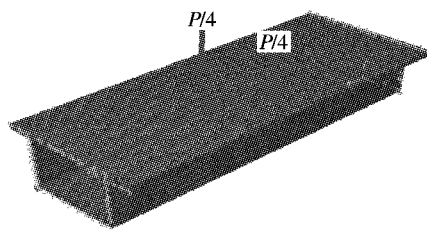


图 6 反对称荷载加载模式

4 参数分析

4.1 算例分析

以图 3 为例,偏心加载点位置 $e=0.25b$ 。分别提取偏心荷载作用下测点 D 沿梁轴方向的纵向应力值 $\sigma_{Pw}(P_{eccentric,load})$ 、对称荷载作用下测点 D 沿梁轴方向的弯曲应力值 $\sigma_{sym,w}(P_{sym,load})$ 、反对称荷载 $P_{asym,load}=P/4$ 作用下测点 D 梁轴方向的扭转和畸变翘曲应力值 $\sigma_{asym,w}(P_{asym,load})$ 以及正对称荷载弯曲应力值 $\sigma_{sym,w}$ 与反对称荷载作用下的扭转畸变翘曲应力值 $\sigma_{asym,w}$ 和值,分别绘制于图 7。

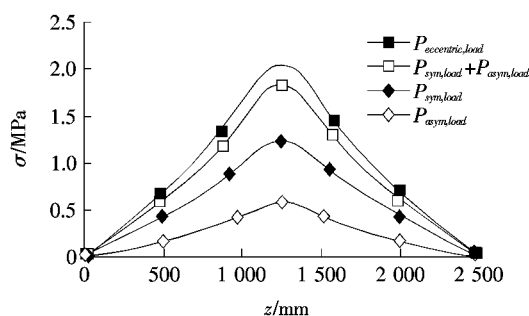


图 7 沿梁轴方向的纵向应力

由图 7 可见:偏心荷载 P 作用下测点 D 的纵向应力值大于正对称荷载和反对称荷载作用下的应力和值,表明当偏心距 $e=0.25b$ 时,反对称荷载 $P_{asym,load}=P/4$ 计算扭转畸变翘曲正应力值是偏小的,即实际结构在靠近加载点腹板分配的力较多,与式(2)的设定存在偏差。按式(6)计算偏心荷载 P 作用于 $e=0.25b$ 位置时其反对称荷载系数 k , $k=0.341$,即 $k \neq \alpha=0.25$ 。

图 8 为偏心荷载 P 作用下的纵向应力值 σ_{Pw} 与正对称荷载和反对称荷载作用下的应力和值 $\sigma_{sym,w} + \sigma_{asym,w}$ 沿梁轴线方向的误差 $\delta(\%)$ 。

$$\delta(\%) = \left| \frac{\sigma_{Pw} - (\sigma_{sym,w} + \sigma_{asym,w})}{\sigma_{Pw}} \right| \times 100\% \quad (7)$$

由图 8 可知:沿梁轴线方向的误差 δ 不是固定值,在两端误差最小为 10.3%; $3L/8$ 与 $5L/8$ 处误差达到

最大值 12.63%; 加载点截面处的相对误差为 10.64%, 该点处绝对差值最大, 且与最大误差仅差 2%。因此, 选取加载点截面测点 D 纵向应力值, 按式(6)计算反对称荷载系数 k 是可行的。

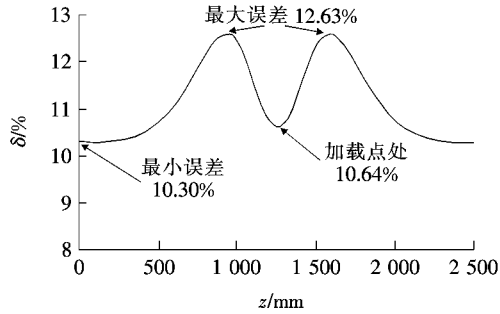


图 8 δ 误差分析图

4.2 宽跨比 b/L

宽跨比 b/L 为箱梁腹板之间的间距 b 与跨径 L 的比值, 相邻腹板之间的间距分别选取 $b=300、600、800、1\,000$ mm, 控制截面参数如图 3 所示。利用 Abaqus 有限元软件分别建立不同宽跨比下的数值模型, 提取不同荷载工况下测点 D 的纵向应力值, 利用式(6), 绘制如图 9 所示的反对称荷载系数 k 随宽跨比 b/L 的变化规律。

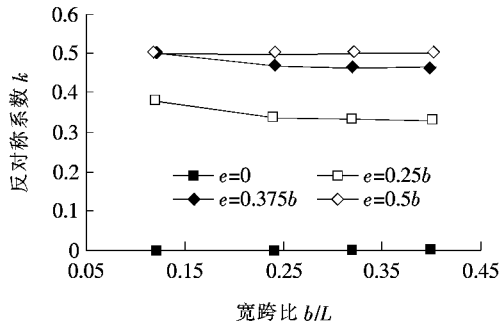


图 9 反对称荷载系数 k 随宽跨比 b/L 的变化规律

由图 9 可见: 反对称荷载系数 k 随着宽跨比 b/L 的增大而逐渐降低, 但变化幅度相对较缓, 当 b/L 从 0.12 变化到 0.24 时, 反对称荷载系数 k 的变化相对较大, 而当 $b/L > 0.24$ 时, 宽跨比 b/L 对反对称荷载系数 k 的影响几乎可以忽略。

4.3 高跨比 H/L

高跨比为箱形梁高度 H 与跨径 L 的比值, 控制截面参数如图 3 所示, 仅改变梁高, 分别取梁高 $H=240、440、640、840、1\,040$ mm, 利用 Abaqus 有限元软件分别建立不同高跨比下的数值模型, 提取不同荷载工况下测点 D 的纵向应力值, 利用式(6), 绘制如图 10 所示的反对称荷载系数 k 随 H/L 的变化规律。

由图 10 可见: 偏心距 $e=0.25b$ 时, 反对称荷载系数 k 随着高跨比 H/L 的增大, 先缓慢增大后缓慢减小, 变化幅度不大; 偏心距 $e=0.375b$ 时, 反对称荷载系数 k 随着高跨比 H/L 的增大而减小, 反对称荷载系数 k 的数值曲线呈现相对平缓的趋势。表明高跨比 H/L 对反对称荷载系数的影响相对较低, 可以忽略不计。

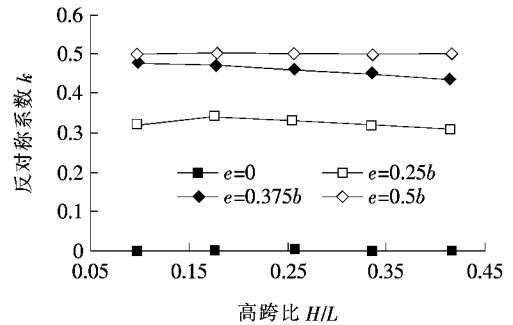


图 10 反对称荷载系数 k 随高跨比 H/L 的变化规律

4.4 高宽比 H/b

取 3.2 节与 3.3 节不同宽度和高度的反对称荷载系数, 绘制如图 11 所示的反对称荷载系数 k 随高宽比 H/b 的变化规律, 进一步验证箱形梁高度和宽度对反对称荷载系数 k 的影响。

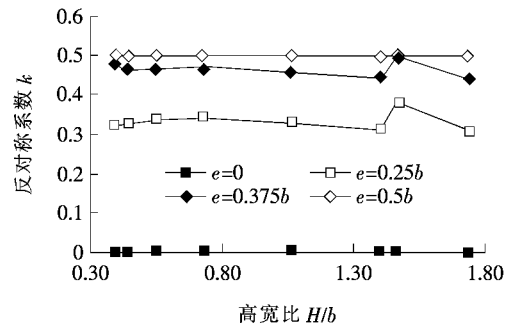


图 11 反对称荷载系数 k 随高宽比 H/b 的变化规律

由图 11 可见: 反对称荷载系数 k 随着高宽比的增加, 变化相对比较平缓, 当箱形梁宽度为 300 mm 时, 高宽比 H/b 为 1.47 时, 有较为明显的波动, 与图 9 相似, 这是因为箱形梁截面宽度较窄, 局部影响显著增强。总体而言, 高宽比对反对称荷载系数 k 的影响可以忽略不计。

4.5 顶板厚度与腹板厚度比 t_o/t_w

控制各项参数如图 3 所示, 改变顶板厚度 t_o , 顶板厚度 t_o 分别取 20、30、40、50、60、70、80 mm, t_o/t_w 变化范围 0.5~2.25, 步长为 0.25。利用 Abaqus 有限元软件分别建立不同顶板厚度下的数值模型, 提取不同荷载工况下测点 D 的纵向应力值, 利用式(6), 绘制如

图 12 所示的反对称荷载系数 k 随 t_0/t_w 的变化规律。

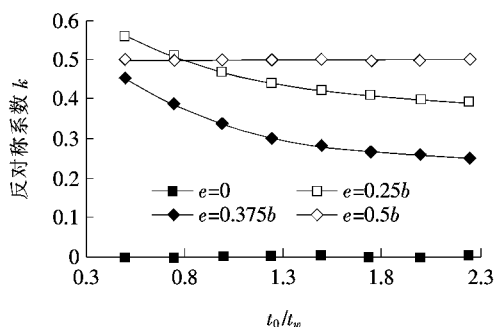


图 12 反对称荷载系数 k 随顶板与腹板厚度比 t_0/t_w 的变化规律

由图 12 可见：偏心距 $e=0.25b$ 和 $e=0.375b$ 下的反对称荷载系数 k 随着顶板厚度与腹板厚度比值 t_0/t_w 的增大而逐渐减小。 $t_0/t_w < 1.5$ 时，反对称荷载系数 k 的值变化较为迅速， $t_0/t_w \geq 1.5$ 时，反对称荷载系数 k 变化相对平缓，呈线性变化规律。当 $t_0/t_w < 1$ 、 $e=0.375b$ 时，反对称荷载系数 k 的值超过了 0.5，这一现象意味着当顶板厚度比腹板厚度薄时，反对称荷载引起的扭转畸变翘曲应力显著增大，若按式 (2) 的结论，反对称荷载系数仅为 0.375，误差超过 30%；而当 $t_0/t_w < 1$ 、 $e=0.25b$ 时，误差更是超过 56%，这一现象必须予以重视。

5 反对称荷载系数 k 的简化计算方法

由上述参数分析可知，顶板厚度与腹板厚度比值 t_0/t_w 对反对称荷载系数 k 起主要作用，而高度、宽度等因素对反对称荷载系数 k 影响则可忽略不计。该节将重点分析反对称荷载系数 k 的简化计算方法。

当 $t_0/t_w = 2.25$ 时，绘制反对称荷载系数 k 随偏心距系数 α 改变时的变化趋势于图 13，并添加函数趋势线。

由图 13 可知：反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 成线性变化的规律，且趋势线拟合程度指标 $R^2 \approx 1$ ，反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 拟合程度具有较强的可靠性；相关系数 ρ_{ka} ：

$$\rho_{ka} = \frac{\text{cov}(k, \alpha)}{\sigma_k \cdot \sigma_\alpha} = 0.999 \approx 1 \quad (8)$$

反对称系数 k 与偏心距系数 α 线性相关性较强，可按 $k = \alpha$ 表示。

由式 (2) 可知：

$$\frac{P_{\text{asym, load}}}{P} = \alpha \quad (9)$$

反对称荷载系数 k 等于偏心距系数 α ，表明当 $t_0/t_w \geq 2.25$ 时，顶板刚度较大，腹板对顶板的约束可以看成铰接约束，反对称荷载系数 k 按照式 (2) 进行计算，反对称荷载 $P_{\text{asym, load}} = k \cdot P$ ， $k = \alpha$ 。

当 $t_0/t_w = 1$ 时，绘制反对称荷载系数 k 随偏心距系数 α 改变时的变化趋势于图 14，并添加函数趋势线。

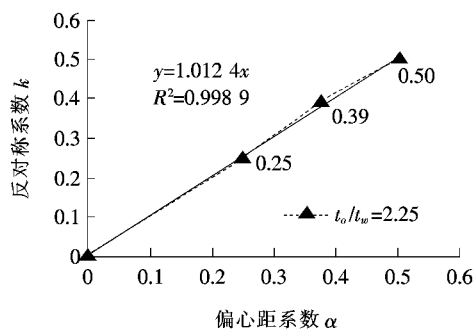


图 13 反对称荷载系数 k 随偏心距系数 α 的变化规律 ($t_0/t_w = 2.25$)

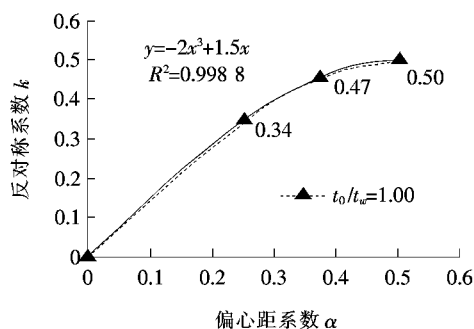


图 14 反对称荷载系数 k 随偏心距系数 α 的变化规律 ($t_0/t_w = 1$)

由图 14 可知：反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 成 3 次抛物线变化的规律，趋势线拟合程度指标 $R^2 \approx 1$ ，反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 拟合程度具有较强的可靠性：

$$k = -2\alpha^3 + 1.5\alpha \quad (10)$$

类比文献 [15] 给出两端固定约束下的内力分配计算方法。

$$F_1 = \frac{P(\alpha b + b/2)^2}{b^3} (2b - 2\alpha b) = \left(-2\alpha^3 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \right) \cdot P \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (1)，可得：

$$\frac{P_{\text{asym, load}}}{P} = -2\alpha^3 + \frac{3}{2}\alpha \quad (12)$$

式 (12) 与式 (10) 结论一致：

(1) 当 $t_0/t_w=1$ 时,箱形梁腹板对顶板的约束相当于固定端约束。

(2) 当 $1 \leq t_0/t_w < 2.25$ 时,反对称荷载系数 k 与偏心距系数 α 的函数关系介于简支约束与固定端约束之间,可按固定端约束情况进行分析,通过式(10)得到的反对称荷载系数 k 可以包络之间的所有数值(图12),反对称荷载 $P_{asym,load} = k \cdot P, k = -2\alpha^3 + 1.5\alpha$ 。

(3) 当 $t_0/t_w < 1$ 、偏心距 $e = 0.375b$ 时,反对称荷载系数 $k > 0.5$,顶板厚度 t_0 越薄,其局部效应越明显,不能简单用上述等效成腹板对顶板的约束情况进行分析。建议在按固定端约束等效计算的同时,考虑对反对称荷载系数 k 进行修正:

$$k = -2\alpha^3 + 1.5\alpha + 0.2(1 - \frac{t_0}{t_w}) \quad (13)$$

6 结论

该文从理论出发,论证了传统横向偏心荷载分解法的局限性,探讨了反对称系数 k 随箱形梁顶板厚度与腹板厚度比 t_0/t_w 、宽跨比 b/L 、高跨比 H/L 、高宽比 H/b 等参数变化的规律,基于控制变量原则,利用Abaqus有限元软件,就如图1所示的加载模式分别进行三维数值建模分析,得到如下结论:

(1) 横向偏心荷载分解法对正对称荷载力的分配无影响, $P_{sym,load} = P/2$, 主要影响反对称荷载 $P_{asym,load}$ 的分配。文献[2]、[4]、[7]关于箱形梁的扭转和畸变效应理论分析仅适用于偏心荷载 $e = 0.5b$ 的情况,具有工程应用局限性。

(2) 箱形梁宽跨比 b/L 、高跨比 H/L 、高宽比 H/b 等参数变化对反对称荷载系数 k 的影响较小,可以忽略不计;而箱形梁顶板厚度与腹板厚度比 t_0/t_w 对反对称荷载系数 k 影响较为明显,反对称荷载系数 k 随着箱形梁顶板厚度与腹板厚度比 t_0/t_w 的增大而减小。

(3) 当 $t_0/t_w \geq 2.25$ 时,箱形梁腹板对顶板的约束可近似比拟成简支约束,横向任意位置的偏心荷载可分解成反对称荷载值 $P_{asym,load} = k \cdot P, k = \alpha$; 当 $1 \leq t_0/t_w < 2.25$ 时,箱形梁腹板对顶板的约束可近似比拟成固定端约束,横向任意位置的偏心荷载可分解成反对称荷载值 $P_{asym,load} = k \cdot P, k = -2\alpha^3 + 1.5\alpha$; 当

$t_0/t_w < 1$ 时,箱形梁腹板对顶板约束较为复杂,局部效应显著增强,该文建议可近似按固定端约束比拟,考虑对反对称荷载系数 k 进行修正,横向任意位置的偏心荷载可分解成反对称荷载值 $P_{asym,load} = k \cdot P, k = -2\alpha^3 + \frac{3}{2}\alpha + 0.2(1 - \frac{t_0}{t_w})$ 。

(4) 该文提出的反对称荷载分配计算方法弥补了文献[2]、[4]、[7]应用的局限性,适用于横向任意位置作用偏心荷载的情况。

参考文献:

- [1] 郭金琼,赵振铭,周瑞光.箱形梁桥畸变应力计算[J].公路,1982(4).
- [2] 郭金琼,房贞政,郑振.箱形梁设计理论[M].2版.北京:人民交通出版社,2008.
- [3] 徐栋,徐方圆,赵瑜,等.箱梁结构完整验算应力和空间网格模型[J].土木工程学报,2014(5).
- [4] 周履.单室矩形箱梁畸变计算[J].桥梁建设,1980(4).
- [5] Richard N,周履.用弹性基础梁相似法分析箱形梁[J].世界桥梁,1978(3).
- [6] 曾庆元.薄壁箱形梁计算的板梁框架法[J].铁道学报,1981(2).
- [7] 张士铎.箱形薄壁截面歪扭(畸变)微分方程的推导及法向应力的近似计算[J].重庆交通大学学报:自然科学版,1983(1).
- [8] Park, N.H., Kang, Y.J., & Kim, H.J. An Independent Distortional Analysis Method of Thin-Walled Multi-Cell Box Girders[J]. Structural Engineering and Mechanics, 2005, 21(3): 275-293.
- [9] 张元海,白昕,林丽霞.箱形梁剪力滞效应的改进分析方法研究[J].土木工程学报,2012(11).
- [10] 胡肇滋.单室箱梁桥畸变的两种弹性地基梁法的研究[J].东北林业大学学报,1987(1).
- [11] 项海帆.高等桥梁结构理论[M].北京:人民交通出版社,2013.
- [12] 刘钊.桥梁概念设计与分析理论[M].上册.北京:人民交通出版社,2010.
- [13] 马磊.单箱多室波形钢腹板组合箱梁桥弯曲扭转性能研究[D].东南大学博士学位论文,2014.
- [14] 罗旗帆.基于能量原理的薄壁箱梁剪力滞理论与试验研究[D].湖南大学博士学位论文,2005.
- [15] 单建,吕令毅.结构力学[M].2版.南京:东南大学出版社,2011.