

集中力活载作用下悬索桥变形及内力的解析算法

赵海霞¹,王涛²

(1.南京航空航天大学金城学院,江苏南京 211156;2.中交水运规划设计院有限公司,北京市 100007)

摘要:悬索桥作为一种柔性结构,活载下的响应是长期以来被研究的重点内容。该文针对悬索桥提出了一种集中力活载作用下结构变形及内力的解析计算方法。以已知成桥状态参数和活载参数为基础,首先分析了主缆变形、主梁变形、主缆和主梁的关系、桥塔变形。随后建立了4类控制方程,分别为各段主缆的无应力长度守恒、各根吊杆的力与变形协调、各跨跨径及高差闭合和主梁的受力平衡,从而使得控制方程的总数与基本未知数的总数相等。最后将控制方程合并成一个目标函数,并进行规划求解。找到基本未知量的取值,使得全部控制方程同时成立,进而推导出所有其他参数,并表达出结构变形后的状态。以一座主跨1 080 m的悬索桥作为算例,验证了方法的可行性和有效性。活载作用下变形及内力的结果都具有良好的精度,与有限元的结果相一致。

关键词:悬索桥;活载集中力;结构变形;内力;控制方程;解析法

中图分类号:U441

文献标志码:A

Analytical Method for Deformation and Internal Force of Suspension Bridge under Concentrated Live Load

ZHAO Haixia¹, WANG Tao²

(1.Nanjing Jincheng College, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 211156, China;

2.CCCC Water Transportation Consultants Co., Ltd., Beijing 100007, China)

Abstract: As a flexible structure, the response of suspension bridges under live load has been the focus of research for a long time. This paper presented an analytical calculation method for structural deformation and internal force of suspension bridges under concentrated live load. Based on the known bridge state parameters and live load parameters, the deformation of the main cable, the deformation of the main beam, the relationship between the main cable and the main beam, and the deformation of the bridge tower were analyzed successively. Then, four kinds of governing equations were established, involving the conserved unstrained length of each main cable, the coordinated force and deformation of each suspender, the closed span and height difference, and the balanced force of the main beam, so that the total number of the governing equations was equal to the total number of basic unknown parameters. Finally, the governing equations were combined into an objective function and solved programmatically. The values of the basic unknown parameters were found to make all the governing equations valid at the same time, and then all the other parameters were deduced. The state of the structure after deformation was expressed. Finally, a suspension bridge with a main span of 1 080 m was taken as an example to verify the feasibility and effectiveness of the method. The results of deformation and internal force under live load were in good agreement with those of the finite element method.

Keywords: suspension bridge; concentrated live load; structural deformation; internal force; governing equation; analytical method

收稿日期:2024-03-01(修改稿)

基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号:52078134)

作者简介:赵海霞,女,硕士,副教授.E-mail:283305743@qq.com

0 引言

悬索桥作为一种大跨柔性结构,更容易产生活载作用下的大变形或挠曲^[1-2]。悬索桥在竖向活载作用下的响应是长期以来被研究的重点内容。计算理论在发展过程中经历了弹性理论、挠度理论和有限位移理论3个阶段。弹性理论没有考虑恒载对竖向刚度的贡献,也没有考虑位移的非线性影响,因此设计出的悬索桥往往具有笨拙的桥塔和过高的加劲梁。与弹性理论相比,挠度理论考虑了活载下主缆和加劲梁的竖向位移以及恒载对活载的抗力,因此重力刚度也作为一个重要的概念被深入研究^[3-4]。至今,挠度理论仍然是悬索桥活载响应的重要计算理论。但是,挠度理论假设恒载下的主缆线形为抛物线,并将离散的吊杆简化成连续分布的膜,无法考虑活载下吊杆的倾斜、伸长及加劲梁的纵向位移,这些都与实际不符,会显著影响结果。挠度理论表明主缆刚度对抵抗全桥活载挠度发挥的作用比主梁更大。因此,很多后续的解析分析中仅考虑了主缆的贡献而忽略了主梁^[5-7]。但随着悬索桥的进一步发展,特别是大跨度铁路悬索桥的出现,依据使用需求,要求主梁的刚度大。因此,忽略主梁的刚度贡献是不合适的,需要在计算中加以考虑。

随着有限元法的发展,有限位移理论逐步发展成为大跨悬索桥强有力的分析手段,能够包含各种因素的影响,更为真实地模拟实际结构,结果也更为可靠^[8-12]。近年来,大型商业有限元软件的功能日益

强大,已成为结构分析的便捷手段。悬索桥在活载作用下的响应计算也可以基于有限元平台实现。但是,有限元模型中通常使用杆单元模拟主缆段,例如Ansys中的Link单元^[13-14],这将无法考虑每段主缆内部的几何非线性。另外,模型的建立过程是复杂的,有限元分析主要依靠矩阵运算,计算过程中用户难以把握显式的解析表达,物理意义不明确。因此,建立一种精确的解析法具有十分重要的意义。

本文针对常见的两塔平行索面悬索桥提出了一种活载作用下结构变形及内力的解析计算方法。以一座主跨1 080 m的地锚式悬索桥作为算例,验证了方法的可行性和有效性。

1 结构基本信息及假定

本文研究对象是常见的两塔平行索面悬索桥,塔梁关系采用半漂浮式,如图1所示。初始状态(仅受恒载作用)下的主缆如图2所示。主跨范围内有 n 个上吊点,分别是 O'_1, O'_2, \dots, O'_n ,主缆被这些点分割成 $n+1$ 段悬链线, l'_i 为主跨第 i 段主缆的水平投影长度, P'_i 为第 i 根吊杆的吊杆力,均是竖直向下的。初始状态的所有参数都是已知,包括所有的吊杆力、节点坐标、各段主缆无应力长度等。

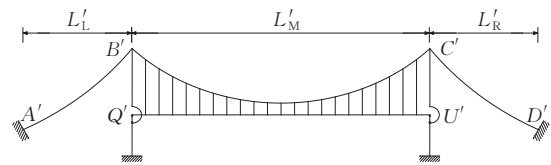


图1 悬索桥计算模型示意图

Figure 1 Calculation model for suspension bridge

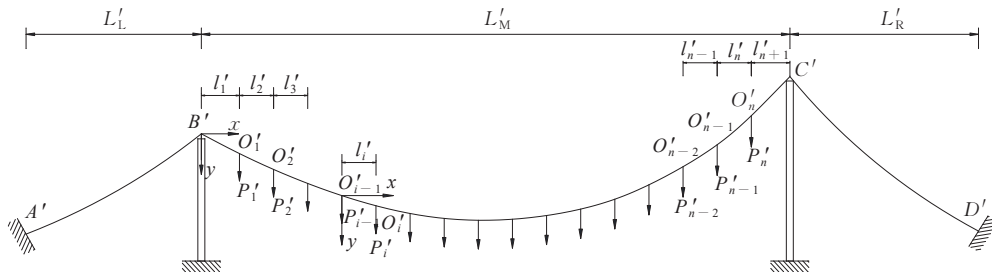


图2 恒载状态下的主缆

Figure 2 Main cable under dead load

初始状态下的主梁如图3所示,共有 n 个下吊点,分别是 G'_1, G'_2, \dots, G'_n , d'_i 为第 i 个下吊点到主梁左端(Q' 点)的水平距离。忽略吊杆的自重,主梁上的

吊杆力与主缆的吊杆力等大反向, R'_Q 和 R'_U 分别是左右梁端的支反力。初始状态下的主梁被近似认为处于无应力状态,主梁中不存在弯矩,各点都不发生下

挠。初始状态下主梁的所有参数都是已知,包括所有节点的坐标、所有吊杆力和支反力。

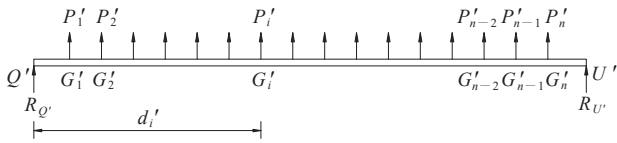


图3 恒载状态下的主梁

Figure 3 Main beam under dead load

本方法的提出基于如下假定:

- (1) 材料处于弹性工作阶段,符合胡克定律。
- (2) 主缆是理想的柔性索,只存在拉力,无弯矩和压力,忽略主缆截面变化的影响。
- (3) 吊杆力方向与上、下吊点的连线保持一致,不考虑吊杆倾斜后的垂度。
- (4) 不考虑桥塔的压缩变形,即忽略塔顶和桥塔下横梁的高程变化。
- (5) 不考虑主梁的纵向拉伸或压缩变形,即每个下吊点的纵向间距保持不变。

2 活载响应计算理论

2.1 主缆线形计算

2.1.1 主跨

恒载和活载共同作用下的主跨和主缆如图4所示,主跨范围内的上吊点分别移动到 O_1, O_2, \dots, O_n , l_i 为主跨第 i 段主缆的水平投影长度,主跨总跨径变为 L_M , P_i 为第 i 根吊杆的轴向拉力,此时吊杆力不再是竖直向下的。左、右塔顶的 I_B 点各自向跨中发生了侧移量 Δ_B, Δ_C 。以每个主缆索段的起点为原点建立局部坐标系 xy , x 轴水平向右, y 轴竖直向下。 XY 为大地坐标系, X 轴水平向右, Y 轴竖直向上。

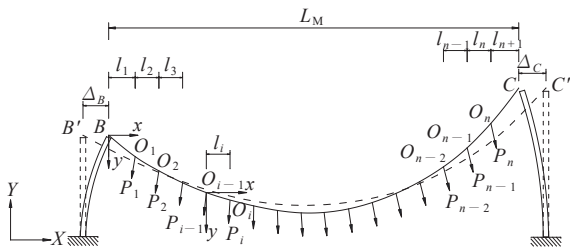


图4 恒载和活载共同作用下的主跨主缆

Figure 4 Main cable of main span under dead load and live load

在各个局部坐标系下第 i 段主缆悬链线的线形

方程可表达为^[15]:

$$y = c_i \left[\cosh \left(\frac{x}{c_i} + a_i \right) - \cosh a_i \right] \quad (1)$$

式中: $c_i = -H_i/q$, H_i 为恒载活载共同作用下第 i 段主缆的水平分力(kN), q 为主缆的每延米自重(kN/m); a_i 为悬链线方程的参数。

第 i 段悬链线主缆的左右端点的高差 Δh_i 可以表达为:

$$\Delta h_i = y(l_i) - y(0) = c_i \left[\cosh \left(\frac{l_i}{c_i} + a_i \right) - \cosh a_i \right] \quad (2)$$

式中: l_i 为主跨第 i 段主缆的水平投影长度。

主跨范围内第 i 段悬链线的主缆无应力长度 S_i 可表达为^[15]:

$$S_i = c_i \left[\sinh \left(\frac{l_i}{c_i} + a_i \right) - \sinh a_i \right] - \frac{H_i}{2E_c A_c} \left\{ l_i + \frac{c_i}{2} \left[\sinh \left[2 \left(\frac{l_i}{c_i} + a_i \right) \right] - \sinh(2a_i) \right] \right\} \quad (3)$$

式中: E_c 和 A_c 分别为主缆的弹性模量和横截面面积。

在恒载活载共同作用下,任一上吊点 O_i 的坐标可以表达为:

$$X_{O_i} = X_B + \sum_{k=1}^i l_k \quad (4)$$

$$Y_{O_i} = Y_B - \sum_{k=1}^i \Delta h_k \quad (5)$$

式中: X, Y 分别表示在大地坐标系下某点的水平坐标和竖向坐标。

又因为:

$$X_B = X_{B'} + \Delta_B \quad (6)$$

并假设桥塔侧弯时产生的塔顶竖向位移可忽略不计,即:

$$Y_B = Y_{B'} \quad (7)$$

所以:

$$X_{O_i} = X_{B'} + \Delta_B + \sum_{k=1}^i l_k \quad (8)$$

$$Y_{O_i} = Y_{B'} - \sum_{k=1}^i \Delta h_k \quad (9)$$

为了推导主跨范围内相邻悬链线段之间的参数关系,需要建立上吊点处的受力平衡方程。任一上吊点处的受力状态如图5所示。

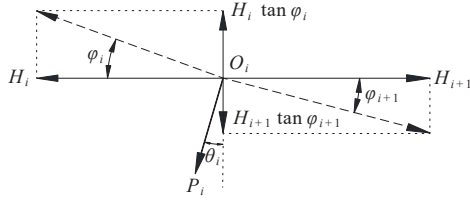


图5 上吊点处力的平衡

Figure 5 Force equilibrium at upper hanging point

分别构建水平向和竖向力的平衡:

$$H_i + P_i \sin \theta_i = H_{i+1} \quad (10)$$

$$H_i \tan \varphi_i = H_{i+1} \tan \varphi_{i+1} + P_i \cos \theta_i \quad (11)$$

式中: P_i 为第 i 根吊杆的轴向力 (kN); θ_i 为第 i 根吊杆的竖向倾角; φ_i 和 φ_{i+1} 分别为上吊点 O_i 左侧和右侧的主缆切线方向与水平方向的夹角。

由切线倾角与导函数的关系,有:

$$\tan \varphi_i = y'(l_i) = \sinh \left(\frac{l_i}{c_i} + a_i \right) \quad (12)$$

$$\tan \varphi_{i+1} = y'(0) = \sinh a_{i+1} \quad (13)$$

将式(12)~(13)代入式(11),得:

$$a_{i+1} = a \sinh \left[\frac{H_i}{H_{i+1}} \sinh \left(\frac{l_i}{c_i} + a_i \right) - \frac{P_i}{H_{i+1}} \cos \theta_i \right] \quad (14)$$

2.1.2 左右边跨

恒载活载共同作用下的边跨主缆如图6所示,左边跨、右边跨的跨径分别为 L_L 和 L_R ,左、右塔顶的 I_P 点侧移量分别为 Δ_B 、 Δ_C 。

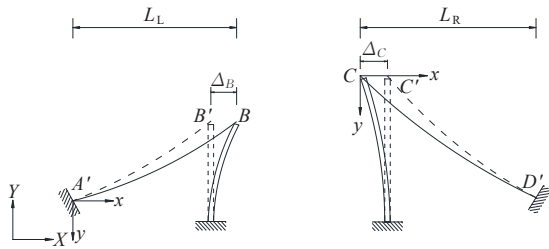


图6 恒载活载共同作用下的边跨主缆

Figure 6 Main cable of side span under dead load and live load

左右边跨范围内没有吊杆,为一整段悬链线。左右边跨的悬链线方程 y_L 、 y_R ,两端高差 Δh_L 、 Δh_R 和无应力长度 S_L 、 S_R 的计算公式都与主跨相似。直接给出下面的计算公式:

$$y_L = c_L \left[\cosh \left(\frac{x}{c_L} + a_L \right) - \cosh a_L \right] \quad (15)$$

$$\Delta h_L = c_L \left[\cosh \left(\frac{L_L}{c_L} + a_L \right) - \cosh a_L \right] \quad (16)$$

$$S_L = c_L \left[\sinh \left(\frac{L_L}{c_L} + a_L \right) - \sinh a_L \right] -$$

$$\frac{H_L}{2E_c A_c} \left\{ L_L + \frac{c_L}{2} \left[\sinh \left[2 \left(\frac{L_L}{c_L} + a_L \right) \right] - \sinh (2a_L) \right] \right\} \quad (17)$$

式中: $c_L = -H_L/q$, H_L 为恒载活载共同作用下左边跨主缆的水平分力 (kN); a_L 为悬链线方程的参数; L_L 为左边跨主缆的水平投影长度。

$$y_R = c_R \left[\cosh \left(\frac{x}{c_R} + a_R \right) - \cosh a_R \right] \quad (18)$$

$$\Delta h_R = c_R \left[\cosh \left(\frac{L_R}{c_R} + a_R \right) - \cosh a_R \right] \quad (19)$$

$$S_R = c_R \left[\sinh \left(\frac{L_R}{c_R} + a_R \right) - \sinh a_R \right] -$$

$$\frac{H_R}{2E_c A_c} \left\{ L_R + \frac{c_R}{2} \left[\sinh \left[2 \left(\frac{L_R}{c_R} + a_R \right) \right] - \sinh (2a_R) \right] \right\} \quad (20)$$

式中: $c_R = -H_R/q$, H_R 为恒载活载共同作用下右边跨主缆的水平分力 (kN); a_R 为悬链线方程的参数; L_R 为右边跨主缆的水平投影长度。

2.2 主梁线形计算

2.2.1 主梁计算模型

首先考虑主梁模型,如图7所示,跨内受到 $F_1 \sim F_{n+1}$ 共 $n+1$ 个竖向集中力作用,其中一个为活载集中力,其余为吊杆力。左右支反力分别记为 F_0 和 F_{n+2} , x_i 为第 i 个集中力 F_i 的作用点到主梁左端的水平距离。需要说明的是,这里的力是按照正方向表示的,当力的数值为负时表示力的实际作用方向向下。主梁可按照集中力的作用位置分为 $n+2$ 个区段,第 i 个区段上的弯矩可以表达为:

$$M(x) = \sum_{k=0}^{i-1} F_k (x - x_k), x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (21)$$

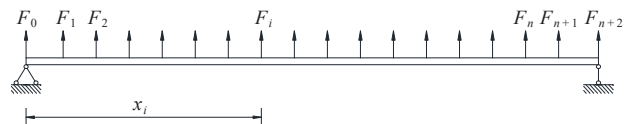


图7 主梁的计算模型

Figure 7 Calculation model of main beam

主梁的挠度 $w(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 间存在以下关系:

$$E_b I_b w''(x) = -M(x) \quad (22)$$

式中： E_b 和 I_b 分别为主梁的弹性模量和抗弯刚度； $w(x)$ 以向下位移为正。

做两次积分，得：

$$-E_b I_b w(x) = \iint M(x) \quad (23)$$

将式(21)代入式(23)，并做积分展开，得到第 i 个区段上的挠度表达式：

$$w(x) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{x_k}{2} x^2 \right) + C_{i,1} x + C_{i,2} \right], \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (24)$$

式中： $C_{i,1}$ 和 $C_{i,2}$ 均为积分产生的常系数。

对挠度表达式求一次导，得到第 i 个区段上的转角表达式：

$$w'(x) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{2} x^2 - x_k x \right) + C_{i,1} \right], \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (25)$$

根据式(24)~(25)可以写出第 i 个集中力 F_i 的作用点左右两侧的挠度和转角：

$$w(x = x_i^-) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{6} x_i^3 - \frac{x_k}{2} x_i^2 \right) + C_{i,1} x_i + C_{i,2} \right] \quad (26)$$

$$w(x = x_i^+) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^i F_k \left(\frac{1}{6} x_i^3 - \frac{x_k}{2} x_i^2 \right) + C_{i+1,1} x_i + C_{i+1,2} \right] \quad (27)$$

$$w'(x = x_i^-) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^{i-1} F_k \left(\frac{1}{2} x_i^2 - x_k x_i \right) + C_{i,1} \right] \quad (28)$$

$$w'(x = x_i^+) = -\frac{1}{E_b I_b} \left[\sum_{k=0}^i F_k \left(\frac{1}{2} x_i^2 - x_k x_i \right) + C_{i+1,1} \right] \quad (29)$$

根据连续性条件：

$$w(x = x_i^-) = w(x = x_i^+) \quad (30)$$

$$w'(x = x_i^-) = w'(x = x_i^+) \quad (31)$$

得到相邻区段的常系数之间的递推关系：

$$C_{i+1,1} = C_{i,1} + \frac{1}{2} F_i x_i^2 \quad (32)$$

$$C_{i+1,2} = C_{i,2} - \frac{1}{6} F_i x_i^3 \quad (33)$$

至此，所有实常数都可以归结于 $C_{1,1}$ 和 $C_{1,2}$ 。

再引入边界条件：

$$w(x = x_0) = 0 \quad (34)$$

$$w(x = x_{n+2}) = 0 \quad (35)$$

解得：

$$C_{1,1} = -\sum_{k=0}^{n+1} F_k \left(\frac{1}{6} x_{n+2}^2 - \frac{x_k}{2} x_{n+2} \right) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2} F_k x_k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{6} F_k x_k^3 \frac{1}{x_{n+2}} \quad (36)$$

$$C_{1,2} = 0 \quad (37)$$

此时所有常系数均已解出。可以根据式(24)和式(25)得到任意点处的挠度和转角，主梁的变形也随之获得。

2.2.2 活载作用后的主梁线形

主梁的受力及变形示意图如图8所示，图中 F 为活载集中力， $P_{xF,i}$ 、 $P_{yF,i}$ 分别为由活载 F 引起的第 i 个吊杆力的水平和竖向分力的变化量($P_{xF,i}$ 未在图8中示出)， ΔR_Q 、 ΔR_U 分别为主梁左端、右端的支反力变化量，它们也是由活载引起的， d_F 为活载 F 的作用点到主梁左端的水平距离， d_i 为 $P_{yF,i}$ 的作用点到主梁左端的水平距离。活载集中力的大小 F 和位置 d_F 是由要研究的工况所确定的已知参数。

在这里引入两点近似：①由于活载引起的主梁内部的轴力是很小的，所以近似认为主梁在纵向上不发生弹性拉伸或压缩变形，仅发生整体的刚体位

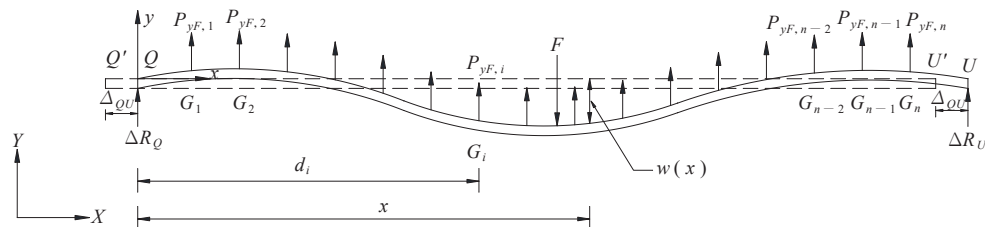


图8 主梁上由活载引起的作用及响应

Figure 8 Action and response of main beam caused by live load

移 Δ_{QU} ,也就是说,每个下吊点的纵向间距保持不变(所以 $d_i=d'_i$),主梁上所有节点的纵向位移都等于 Δ_{QU} ;②因为吊杆的竖向倾角 θ_i 通常很小,所以 $P_{xF,i}$ 通常明显小于 $P_{yF,i}$ 。更重要的是, $P_{xF,i}$ 对主梁某横截面的力臂远远小于 $P_{yF,i}$ 对同一横截面的力臂。所以, $P_{xF,i}$ 对截断点产生的弯矩可以被忽略。因此,计算主梁挠度时,可以不计入 $P_{xF,i}$ 的影响,只考虑所有的竖向作用力,包括 ΔR_Q 、 $P_{yF,1} \sim P_{yF,n}$ 、 F 和 ΔR_U ,共 $n+3$ 个力。

将上述 $n+3$ 个竖向力按照作用点从左到右的顺序依次排列,然后比拟代入2.2.1中的主梁计算模型,主梁在活载下的挠度 $w(x)$ 和转角 $w'(x)$ 的响应就可以按照式(24)、(25)计算得到。

所以,恒载活载共同作用下任一下吊点 G_i 的坐标可以表达为:

$$X_{G_i} = X_{G'_i} + \Delta_{QU} \quad (38)$$

$$Y_{G_i} = Y_{G'_i} - w(d_i) \quad (39)$$

2.3 主缆与主梁的关系

主缆和主梁通过吊杆相连,假设吊杆的垂度可以被忽略,那么吊杆力的方向可以根据上下吊点的坐标确定,并且吊杆对主缆和主梁的作用力大小相等、方向相反。对于任一吊杆处的主缆和主梁而言,初始状态和变形后的状态如图9所示。

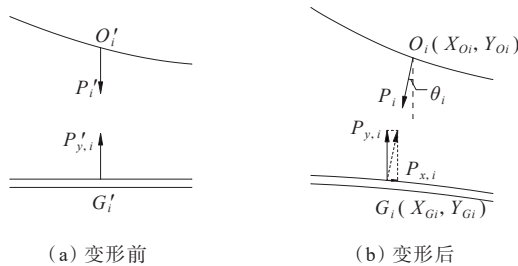


图9 吊杆处的主缆和主梁的初始状态和变形后的状态

Figure 9 Initial and deformed states of main cable and main beam at suspender

在初始状态下,吊杆轴向力的大小为 P'_i ,由于吊杆是竖直的,所以下吊点受到的水平力 $P_{x,i}'$ 和竖向力 $P_{y,i}'$ 可以写为:

$$P'_{x,i} = 0 \quad (40)$$

$$P'_{y,i} = P'_i \quad (41)$$

在变形后的状态中,吊杆轴向力的大小变为 P_i ,并且吊杆力的方向存在竖向倾角 θ_i ,此时下吊点受到的水平力 $P_{x,i}$ 和竖向力 $P_{y,i}$ 可以写为:

$$P_{x,i} = P_i \sin \theta_i \quad (42)$$

$$P_{y,i} = P_i \cos \theta_i \quad (43)$$

式中: θ_i 根据上下吊点在全局坐标系下的位置确定,即:

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{X_{O_i} - X_{G_i}}{Y_{O_i} - Y_{G_i}}\right) \quad (44)$$

所以,由活载 F 引起的第 i 个吊杆力的水平分力变化量 $P_{xF,i}$ 和竖向分力变化量 $P_{yF,i}$ 可以表达为:

$$P_{xF,i} = P_{x,i} - P'_{x,i} \quad (45)$$

$$P_{yF,i} = P_{y,i} - P'_{y,i} \quad (46)$$

2.4 桥塔侧移

桥塔的侧移是由左右两侧不相等的主缆水平力所引起,如图10所示。

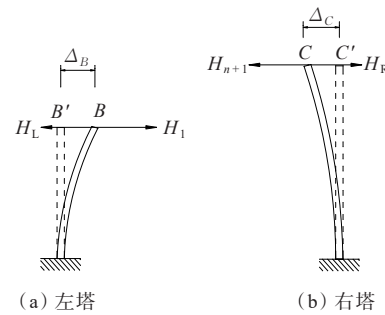


图10 桥塔的侧移

Figure 10 Lateral displacement of bridge towers

桥塔的位置量可以由下式计算:

$$\Delta_B = (H_1 - H_L) \delta_B \quad (47)$$

$$\Delta_C = (H_{n+1} - H_R) \delta_C \quad (48)$$

式中: δ_B 、 δ_C 为左右桥塔的柔度系数。

3 控制方程的建立与求解

3.1 基本未知量

由第2节的分析可知,决定变形后状态的基本未知量见表1。当这些基本未知量取值确定时,就可推导出其他参数,并表达出结构变形后的状态。

3.2 控制方程的建立

3.2.1 各段主缆的无应力长度守恒

对于初始状态和变形后的状态,左边跨、主跨和右边跨的每一段主缆的无应力长度应该守恒,即:

$$S_L = S'_L \quad (49)$$

$$S_i = S'_i, \quad 1 \leq i \leq n+1 \quad (50)$$

$$S_R = S'_R \quad (51)$$

式中: S'_L 和 S'_R 分别为初始状态中左、右边跨主缆的无

应力长度; S'_i 为初始状态中主跨范围内第 i 段悬链线的主缆无应力长度。

表 1 基本未知量

Table 1 Basic unknown parameters

基本未知量	位置	符号	数量
悬链线水平投影长度	左边跨	L_L	1
	主跨	$l_1 \sim l_{n+1}$	$n+1$
	右边跨	L_R	1
悬链线参数	左边跨	a_L	1
	主跨	a_1	1
	右边跨	a_R	1
	左边跨	H_L	1
主缆水平力	主跨	H_1	1
	右边跨	H_R	1
吊杆轴向力		$P_1 \sim P_n$	n
主梁纵向刚体位移		Δ_{QU}	1
主梁梁端支反力变化量	左端	ΔR_Q	1
	右端	ΔR_U	1
合计			$2n+12$

3.2.2 各根吊杆的力与变形协调

对于任一吊杆,初始状态中的吊杆轴向力为 P'_i ,变形后状态中的吊杆轴向力为 P_i ,所以吊杆轴向力的增量 ΔP_i 可以表达为:

$$\Delta P_i = P_i - P'_i \quad (52)$$

由于忽略了吊杆的垂度,吊杆的长度可以通过上下吊点的位置确定。初始状态下,吊杆是竖直的,该根吊杆的长度 $l'_{h,i}$ 可以表达为:

$$l'_{h,i} = Y_{O'} - Y_{G_i} \quad (53)$$

变形后状态下,对应吊杆长度 $l_{h,i}$ 可表达为:

$$l_{h,i} = \sqrt{(X_{O_i} - X_{G_i})^2 + (Y_{O_i} - Y_{G_i})^2} \quad (54)$$

所以,吊杆长度的增量 $\Delta l_{h,i}$ 可以表达为:

$$\Delta l_{h,i} = l_{h,i} - l'_{h,i} \quad (55)$$

将每个吊杆视为弹性体,需要满足力与变形的协调条件,即:

$$\Delta l_{h,i} = \frac{\Delta P_i}{E_h A_h} l'_{h,i}, 1 \leq i \leq n \quad (56)$$

式中: E_h 和 A_h 分别为吊杆的弹性模量和横截面面积。

3.2.3 各跨跨径及高差闭合

变形后的状态下,在结构的立面上,各跨范围内所有悬链线段的水平投影长度之和以及高差之和需

要满足以下闭合条件:

$$L_L = L'_L + \Delta_B \quad (57)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i = L'_M - \Delta_B - \Delta_C \quad (58)$$

$$L_R = L'_R + \Delta_C \quad (59)$$

$$\Delta h_L = Y_{A'} - Y_{B'} \quad (60)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \Delta h_i = Y_{B'} - Y_{C'} \quad (61)$$

$$\Delta h_R = Y_{C'} - Y_{D'} \quad (62)$$

式中: L'_L, L'_M, L'_R 和 $Y_{A'}, Y_{B'}, Y_{C'}, Y_{D'}$ 均为第 1 节中的已知量。

3.2.4 主梁的受力平衡

变形后的主梁处于静力平衡状态,对主梁进行受力分析,竖向力、水平力、对梁端的力矩应该是平衡的,表达如下:

$$\sum_{i=1}^n P_{x,F,i} = 0 \quad (63)$$

$$\Delta R_Q + \sum_{i=1}^n P_{y,F,i} + \Delta R_U - F = 0 \quad (64)$$

$$\sum_{i=1}^n (P_{y,F,i} d_i) + \Delta R_U L - F d_F = 0 \quad (65)$$

式中: L 为主梁的长度。

3.3 控制方程的求解

通过对每个控制方程进行变形,把等号右端的项移至左端,改写成函数形式 $f(\cdot) = 0$, 此时方程的左端可以被理解为该控制方程的误差。为了使所有的控制方程同时满足,将所有变形后的 $2n+12$ 个控制方程合并成一个目标函数,如下:

$$\sum_{i=1}^{2n+12} f_i^2 = 0 \quad (66)$$

利用非线性 GRG (Generalized Reduced Gradient) 法^[16] 或其他算法对式 (66) 进行规划求解,解出表 1 中 $2n+12$ 个基本未知量,使 $2n+12$ 个控制方程同时成立。

4 算例

4.1 工程简介和恒载状态参数

为证明上述解析算法在活载作用下悬索桥变形和内力计算中的有效性,以一座主跨 1 080 m 的地锚式悬索桥作为算例。该桥跨径布置为 (360+1 080+360) m, 采用半漂浮式体系,主跨垂跨比为 1/10, 立面布置如图 11 所示。各项已知参数见表 2。

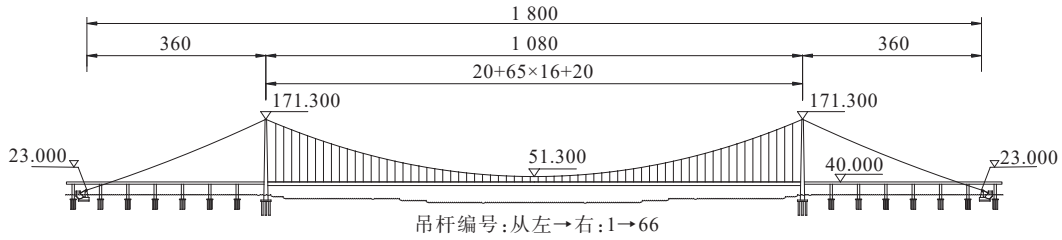


图11 算例桥立面布置图(单位:m)

Figure 11 Elevation view of bridge (unit: m)

表2 已知参数

Table 2 Known parameters

位置	参数	符号	单位	量值
跨径	左边跨	L_L'	m	360
	主跨	L_M'	m	1 080
	右边跨	L_R'	m	360
主缆	每延米自重	q	kN/m	23.577
	弹性模量	E_c	GPa	201
	截面面积	A_c	m ²	0.297 5
	左锚点高程	$Y_{A'}$	m	23.000
	右锚点高程	$Y_{D'}$	m	23.000
	左塔顶 I_P 点高程	$Y_{B'}$	m	171.300
	右塔顶 I_P 点高程	$Y_{C'}$	m	171.300
	跨中高程	Y_{mid}	m	51.300
	数量	n		66
	间距	$l_2' \sim l_{66}'$	m	16
吊杆	最左侧吊杆与左塔中心线的间距	l_1'	m	20
	最右侧吊杆与右塔中心线的间距	l_{67}'	m	20
桥塔	弹性模量	E_h	GPa	201
	截面面积	A_h	m ²	0.002 14
	左塔柔度系数	δ_B	m/kN	4.053×10^{-4}
	右塔柔度系数	δ_C	m/kN	4.053×10^{-4}
加劲梁	截面惯性矩	I_b	m ⁴	50
	弹性模量	E_b	GPa	201
	每延米自重	w_b	kN/m	209.83

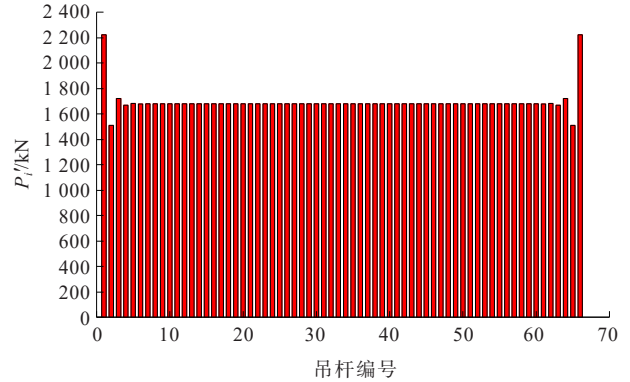


图12 恒载状态下的吊杆力

Figure 12 Suspender fore under dead load

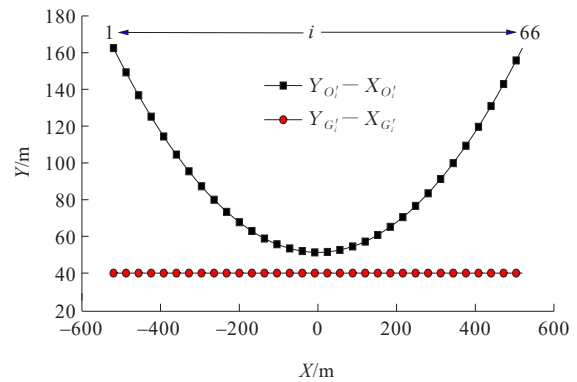


图13 恒载状态下的上下吊点坐标

Figure 13 Coordinates of upper and lower hanging points under dead load

根据以上数据,应用成桥状态的主缆找形解析算法^[15]计算得到恒载状态下的吊杆力、上下吊点坐标以及各段主缆的无应力长度如图12~14所示。左右边跨主缆无应力长度 $S_L'=S_R'=388.287$ m。在恒载状态下,左右梁端的支反力均为850.88 kN。

4.2 活载作用下的内力及变形

为了计算活载作用下的内力及变形,研究了两种荷载工况,如图15所示。在工况1中,活载集中力作用在主跨跨中($d_F=L_M'/2$);在工况2中,活载集中力作用在主跨1/4跨处($d_F=L_M'/4$)。

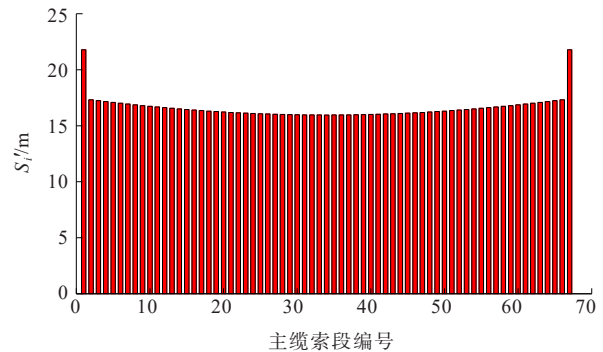


图14 恒载状态下主跨主缆各索段的无应力长度

Figure 14 Unstrained length of each cable segment of main span and main cable under dead load

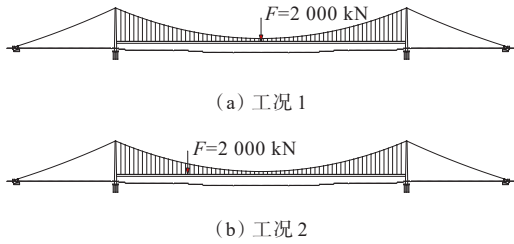


图 15 活载加载工况

Figure 15 Live load application conditions

根据本文提出的解析算法,利用 Microsoft Excel 规划求解工具栏中的非线性 GRG 法,求出控制方程的 144 个基本未知量,进而获得活载下的结构响应。作为对照和验证,在 Ansys 16.0 中建立了对应的有限元模型,并获得了对应荷载工况的结果。

在结构变形方面,本文提出的解析法与有限元计算得到的结果相吻合。采用上述两种方法算出的主梁竖向变形如图 16 所示,向上变形为正,向下变形为负。主缆竖向位移如图 17 所示,与主梁的竖向

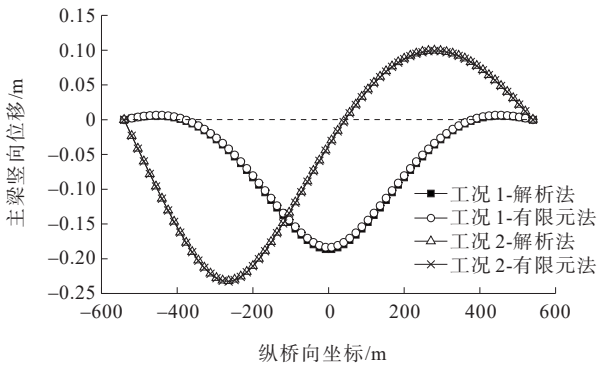


图 16 解析法和 FEM 算出的主梁竖向变形

Figure 16 Vertical deformation of main beam calculated by analytical method and FEM

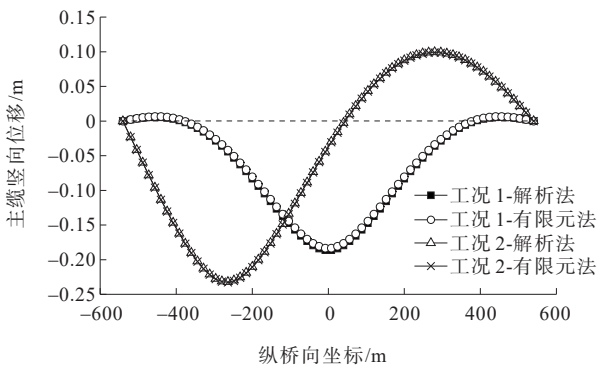


图 17 解析法和 FEM 算出的主缆竖向位移

Figure 17 Vertical deformation of main cable calculated by analytical method and FEM

位移十分相近,两者间微小的差异是由于吊杆的伸缩及倾斜引起的。

不同工况下的塔顶位移和主梁纵向漂移见表 3、4,以向右位移为正。两种方法的计算结果相差均小于 1 mm。相同的荷载作用于跨中点产生的塔顶位移量比作用于 1/4 跨处产生的塔顶位移量大。当活载集中力作用在主跨跨中时,主梁不产生刚体纵向漂移;当活载集中力作用在主跨 1/4 跨处时,主梁产生向偏载一侧的刚体纵向漂移。

表 3 活载引起的塔顶侧移

Table 3 Tower-top displacement caused by live load

工况	桥塔	侧移量/m		误差/mm
		解析法	有限元法	
1	左塔	0.012 4	0.011 5	0.9
	右塔	-0.012 4	-0.011 5	-0.9
2	左塔	0.008 9	0.008 3	0.6
	右塔	-0.008 8	-0.008 3	-0.5

表 4 活载引起的主梁纵向漂移量

Table 4 Longitudinal drift of main beam caused by live load

工况	纵向漂移量/mm		误差/mm
	解析法	有限元法	
1	0.0	0.0	0.0
2	-48.5	-48.7	0.2

在结构内力方面,本文提出的解析法也与有限元计算得到的结果相吻合。不同工况下的吊杆轴向拉力增量的结果如图 18 所示,除工况 2 中第 65、66 根吊杆外,其余绝对误差均小于 0.2 kN,相对误差均小于 2%。由图 18 可以发现,所有吊杆的轴力都增大,且增大值在位置分布上呈现 3 个峰。活载集中力作用点附近的吊杆力增量最大,靠近梁端支座的几对吊杆力增量较大。

不同工况下的梁端支反力变化量见表 5。当活载集中力作用在主跨跨中时,两侧的支反力都明显减小;当活载集中力作用在主跨 1/4 跨处时,靠近活载一侧的支反力有所增大,远离活载一侧的支反力有所减小。在这两个工况中,即使某些支反力由于活载的作用而减小,但减小量仅为恒载作用下的支反力的 7%~18%,远不足以使得梁端支座产生拉力或脱空。

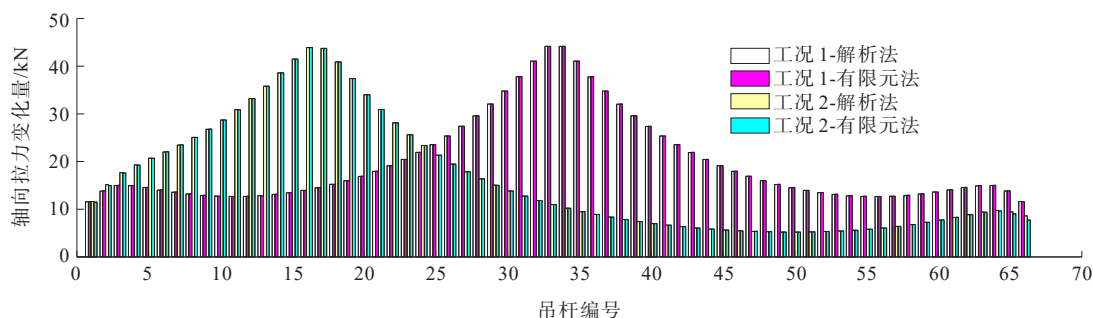


图18 解析法和FEM算出的吊杆轴向拉力变化量

Figure 18 Variation of axial tension of suspender calculated by analytical method and FEM

表5 活载引起的梁端支反力变化量

Table 5 Variation of bearing reaction at beam ends caused by live load

工况	位置	支反力变化量/kN		相对误差/ %
		解析法	有限元法	
1	左端	-152.65	-153.28	0.4
	右端	-152.69	-153.28	0.4
2	左端	60.18	60.66	0.8
	右端	-130.48	-129.07	1.1

由表5可知,本文提出的解析法与有限元计算得到的结果相似,表明了活载作用下悬索桥结构变形及内力的解析计算方法的可行性和有效性。

5 结论

(1) 本文提出的解析计算方法可以有效地求解活载作用下悬索桥结构变形及内力,与有限元法的结果基本一致。求解的内容主要包括:主缆和主梁的竖向变形、塔顶位移、主梁的纵向漂移、吊杆力和支反力的变化量。

(2) 在解析法中需要建立4类控制方程,分别是各段主缆的无应力长度守恒、各根吊杆的力与变形协调、各跨跨径及高差闭合、主梁的受力平衡,从而使得控制方程的总数与基本未知数的总数相等。最后将控制方程合并成一个目标函数,并进行规划求解。得出使全部控制方程同时成立的基本未知量,进而推导出其他参数,并表达出结构变形后的状态。

(3) 主梁的最大下挠量出现在活载集中力作用点附近,相同的荷载作用于1/4跨处产生的最大下挠量比作用于跨中点产生的最大下挠量大。另外,活载作用于跨中点时主梁的两端产生了轻微的上拱,活载作用于1/4跨处时主梁远离活载一侧的部分产

生了较大的上拱,但幅度比靠近活载一侧的部分产生的下挠小。主缆的竖向位移与主梁的竖向位移十分相近,两者间细微差异是由于吊杆的伸缩及倾斜引起的。

(4) 相同的荷载作用于跨中点产生的塔顶位移量比作用于1/4跨处产生的塔顶位移量大。当活载集中力作用在主跨跨中时,主梁不产生刚体纵向漂移;当活载集中力作用在主跨1/4跨处时,主梁产生向偏载一侧的刚体纵向漂移。

(5) 集中活载作用后,所有吊杆的轴力都增大,且增大值在位置分布上呈现3个峰。活载集中力作用点附近的吊杆力最大,靠近梁端支座的几对吊杆力较大。当活载集中力作用在主跨跨中时,两侧的支反力都明显减小;当活载集中力作用在主跨1/4跨处时,靠近活载一侧的支反力有所增大,远离活载一侧的支反力有所减小。常规量级的活载作用可能使得某些支反力减小,但不足以使梁端支座产生拉力或脱空。

参考文献:

References:

- [1] PARK K J, KIM D Y, HWANG E S. Investigation of live load deflection limit for steel cable stayed and suspension bridges[J]. International Journal of Steel Structures, 2018, 18(4): 1252-1264.
- [2] 宋松科, 何佳勇, 陈潜, 等. 大跨窄梁悬索桥结构体系对静动力刚度的影响研究[J]. 中外公路, 2023, 43(4): 80-86. SONG Songke, HE Jiayong, CHEN Qian, et al. Research on effect of structural system on static and dynamic stiffness of large-span and narrow suspension bridges[J]. Journal of China & Foreign Highway, 2023, 43(4): 80-86.

- [3] JENNINGS A. Gravity stiffness of classical suspension bridges[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1983, 109(1): 16-36.
- [4] 邵梦龙, 郭日强, 唐绪. 降低钢桁梁悬索桥主桁疲劳应力幅的结构体系及其可行性研究[J]. *中外公路*, 2022, 42(1): 123-126.
- SHAO Menglong, GUO Riqiang, TANG Xu. Study on structural system and feasibility for reducing fatigue stress amplitude of main truss in steel truss suspension bridge[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2022, 42(1): 123-126.
- [5] WANG X L, CHAI S B, XU Y. Deformation characteristics of double-cable multispan suspension bridges[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2016, 21(4): 06015007.
- [6] ZHANG W M, YANG C Y, CHANG J Q. Cable shape and construction parameters of triple-tower double-cable suspension bridge with two asymmetrical main spans[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2021, 26(2): 04020127.
- [7] 唐茂林, 李帅帅, 唐清华, 等. 中央扣对大跨度空间缆索悬索桥静动力特性影响研究[J]. *中外公路*, 2021, 41(2): 129-134.
- TANG Maolin, LI Shuaishuai, TANG Qinghua, et al. Research on influence of central buckling on static and dynamic characteristics of long-span suspension bridge with spatial cables[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2021, 41(2): 128-134.
- [8] BROTTON, D M. A general computer program for the solution of suspension bridge problems[J]. *Struct. Eng.* 1966, 44(5): 161-167.
- [9] SAAFAN S A. Theoretical analysis of suspension bridges [J]. *Journal of the Structural Division*, 1966, 92(4): 1-12.
- [10] TEZCAN, S S. Stiffness analysis of suspension bridges by iteration[C]//*Proc., Symposium on Suspension Bridges*, Lisbon, Portugal, 1966.
- [11] 黄安明, 杨博, 陈龙, 等. AS法悬索桥锚靴及拉杆锚固可靠性研究[J]. *中外公路*, 2024, 44(1): 133-140.
- HUANG Anming, YANG Bo, CHEN Long, et al. Study on anchorage reliability for strand shoe and pull rod of air-spinning suspension bridge[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2024, 44(1): 133-140.
- [12] 段宝山, 段力, 李元松, 等. 基于中欧规范的大跨公路桁架悬索桥压杆稳定计算对比研究[J]. *中外公路*, 2023, 43(6): 284-289.
- DUAN Baoshan, DUAN Li, LI Yuansong, et al. Comparative study on strut stability calculation of long-span highway truss suspension bridge based on chinese and european specifications[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2023, 43(6): 284-289.
- [13] NIU W J, YU H T. A new analytic solution to determine internal load of small span suspension bridge[J]. *KSCSE Journal of Civil Engineering*, 2016, 20(4): 1419-1428.
- [14] 杨文甫, 陈鑫. 基于最优径向基神经网络的大跨度悬索桥有限元模型修正[J]. *中外公路*, 2023, 43(2): 80-84.
- YANG Wenfu, CHEN Xin. Finite element model updating of long span suspension bridge based on optimized radial basis function neural network[J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2023, 43(2): 80-84.
- [15] ZHANG W M, TIAN G, YANG C Y, et al. Analytical methods for determining the cable configuration and construction parameters of a suspension bridge(Article)[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2019, 71(6): 603-625.
- [16] LASDON L S, WARREN A D, JAIN A, et al. Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 4(1): 34-50.