

设滑动支座的墩柱计算长度系数近似解法

吴军鹏, 张运清, 张珠皓

(山东省交通规划设计院有限公司, 山东 济南 250031)

摘要:为简化计算、便于工程应用,根据设滑动支座墩柱的受力和变形特点,建立桥墩杆件挠曲微分方程,并考虑支座摩阻系数和墩柱初始偏心对稳定系数的影响,结合工程应用的实际情况,得到微分方程的解。通过简化和近似,得到稳定系数方程在一定范围内的解析解。最后以圆柱形墩为例,列出常用尺寸范围内的稳定系数表。

关键词:滑动支座;桥墩;计算长度系数

对于简单约束的柔性杆件,经典力学给出了相应的计算方法和计算长度系数。一端固定,一端自由时,为2.0;一端固定一端铰接时,为0.7;而实际工程中,墩柱的受力状态介于二者之间,0.7~2.0的范围过于宽泛,往往给设计人员造成困扰。有些文献对设置固定支座或普通板式橡胶支座的桥墩进行了研究,得出了比较详细且适用于工程应用的结论,但对大量应用的设滑板支座的桥墩计算长度系数的研究,报道较少。该文将进行这方面的研究。

1 推演分析

根据桥墩受力平衡条件和变形情况:

$$M(x) = F_{cr}(\delta - \omega) + F(L - x) = -EI\omega'' \quad (1)$$

式中: F_{cr} 为竖向压力,即最终求解的失稳临界力; F 为阻止继续产生失稳变形的摩阻力;其他参数见图1。

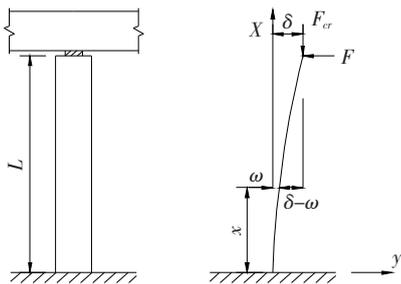


图1 计算图示

为得到该微分方程简单形式的解析解,需将其表示为 F_{cr} 的函数。考虑到各种不确定因素(温度高低、有无硅脂、接触面是否洁净等),将摩阻力对墩柱稳定的有利作用进行折减,偏安全地,令:

$$F = 0.5\mu F_{cr}$$

式中: μ 为支座的摩阻系数。

再令:

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

于是式(1)可转化为:

$$\omega'' + k^2\omega = k^2[\delta - 0.5\mu(L - x)] \quad (2)$$

该微分方程的通解为:

$$\omega = A \sin(kx) + B \cos(kx) + [\delta - 0.5\mu(L - x)]$$

边界条件如下:

- (1) $x=0, \omega=0$;
- (2) $x=0, \omega'=0$;
- (3) $x=L, \omega=\delta$ 。

由边界条件(1)、(2),有:

$$B + \delta - 0.5\mu L = 0$$

$$Ak + 0.5\mu = 0$$

解得:

$$A = -\frac{0.5\mu}{k}$$

$$B = -\delta + 0.5\mu L$$

由边界条件(3),有:

$$A \sin(kL) + B \cos(kL) + [\delta - 0.5\mu(L - x)] = \delta$$

将A、B代入上式,整理后得:

$$\tan(kL) = kL - \frac{2\delta k}{\mu} \quad (3)$$

式(3)即为设滑动支座的墩柱压弯稳定微分方程解。但该式为超越方程,且含有不确定的参数,直接将该式应用于工程实践有一定困难,需要对方程进行简化分析。

注意到, δ 为当前墩顶水平位移 (F_{cr} 作用下继续滑动即认为失稳), 它包括两部分: $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 。 δ_1 为施工时墩顶的初始偏位; δ_2 为温度力、制动力使墩顶产生的位移。

根据有关规范, δ_1 取 $\min(0.02 \text{ m}, L/1500)$, 为方便分析超越方程、简化计算, 取 $L/1500$ (该项对结果影响很小, 详见后文)。

由于设滑动支座, δ_2 由摩阻力控制, 于是:

$$\delta_2 = \frac{\mu WL^3}{3EI} \quad (4)$$

式中: W 为作用于滑动支座的竖向力。在弹性范围内, 混凝土的最大压应变为 0.002, 于是在极限状态下, 可以偏安全地认为:

$$\frac{W}{EA} = 0.002 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4):

$$\delta_2 = \frac{\mu L^3}{1500i^2} = \frac{\mu L \lambda_z^2}{1500}$$

式中:

$$\lambda_z = \frac{L}{i}$$

为区别于计算长细比, 这里暂且将 λ_z 称之为自然长细比, i 为墩柱的回转半径。

于是:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{L}{1500} + \frac{\mu L \lambda_z^2}{1500}$$

将上式代入式(3), 整理后得到:

$$\tan(kL) = kL \left(1 - \frac{1}{750\mu} - \frac{\lambda_z^2}{750} \right) \quad (6)$$

下面对式(6)进行分析:

将 kL 看成单独变量, 令 $kL = t$, 等号两边, 分别看做两个函数:

$$y_1 = \tan t$$

$$y_2 = \left(1 - \frac{1}{750\mu} - \frac{\lambda_z^2}{750} \right) t$$

当 $y_1 = y_2$ 时, t 值即是方程(6)的解。

注意到, y_1 为周期函数, y_2 为一条直线(括号中式子为其斜率)。理论上讲, 其解有无数个, 但作为稳定分析, 这里仅关注其第 1 阶失稳模态, 即第一个非零解。利用图解法(图 2), 可得到:

交点横坐标即是 t 值(即 kL 值)。该图可采用 Matlab 绘出, 或采用 Excel 等工具间接获得 t 值, 在此不赘述。

回到前文中的假设:

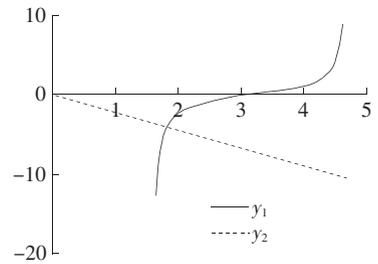


图 2 图解示意

$$k^2 = \frac{F_{cr}}{EI}$$

根据欧拉公式:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\zeta L)^2}$$

为区别于前文中的摩擦系数, 这里, 计算长度系数用 ζ 表示。可得:

$$\zeta = \frac{\pi}{kL} \quad (7)$$

将 kL 值(t 值)代入式(7)即可求出设滑动支座的墩柱计算长度系数。

下面考察 kL 值的影响因素:

y_1 为一固定图形, kL 仅受 y_2 的斜率 $\left(1 - \frac{1}{750\mu} - \frac{\lambda_z^2}{750} \right)$ 影响。当斜率为 0 时, $kL = \pi$, $\zeta = 1$ 。此时:

$$\frac{1}{750\mu} + \frac{\lambda_z^2}{750} = 1$$

JTG D60—2015《公路桥涵设计通用规范》中, 对各种滑动支座与不同接触面的 μ 值有明确规定, 为 0.03 ~ 0.12。则上式第一项取值范围为 [0.044, 0.011], 得到 λ_z 取值范围为 [26.77, 27.23]。直观起见, 以圆形墩柱为例, 将其换算为柱高 L 与柱径 D 的比值:

$$6.69 \leq \frac{L}{D} \leq 6.81$$

大值对应于更小的 μ , 即当 $\frac{L}{D} \leq 6.81$ 时, 计算长度系数可直接采用 1.0, 这样做是安全的。

$$\text{当 } \frac{L}{D} \rightarrow \infty \text{ 时, } kL \rightarrow \pi/2, \zeta \rightarrow 2.0.$$

一般情况下, $\frac{L}{D}$ 不大于 15。按 15 计算时, t 值为 1.693, $\zeta = 1.85$ (但此时支座可能不滑动, 需要判别后采用)。

这与矮墩取大值、高墩取小值的习惯相反, 应引起

设计人员的注意。

需要特别说明的是:上文中的 L 值,对于群桩承台基础或扩大基础,柱的高度自承台或扩大基础顶算起;对于排架墩,应包含冲刷深度和嵌固深度[根据工程经验,反弯点约在冲刷线以下 $(1.0 \sim 1.5)D$ 范围内,这与地基土的 m 值有关]。

2 方程的近似解法

通过图解法或借助 Excel 可得到墩柱的计算长度系数,但过程比较繁琐,不易于进行批量分析。

将上文中 $y_1 = \tan t$ 在 $(\pi/2, \pi)$ 上进行泰勒展开:

$$\tan t = (t - \pi) + \frac{(t - \pi)^3}{3} + \frac{2(t - \pi)^5}{15} + o[(t - \pi)^6]$$

为避免解 5 次方程,这里舍去高阶项,仅保留前两项,同时,令:

$$\left(\frac{1}{750\mu} + \frac{\lambda_z^2}{750} - 1 \right) = a$$

于是可得:

$$(t - \pi) + \frac{(t - \pi)^3}{3} + at = 0$$

整理后:

$$(t - \pi)^3 + (3 + 3a)(t - \pi) + 3a\pi = 0$$

$a < -1$ 时(此时才有实根),该三次方程的实根为:

$$t - \pi =$$

$$\sqrt[3]{-\frac{3+3a}{2} + \sqrt{\left(\frac{3+3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\pi}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{3+3a}{2} - \sqrt{\left(\frac{3+3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\pi}{2}\right)^2}}$$

由于舍去了 5 阶及以上的项,方程的解存在一定误差。经试算,在 $\lambda_z < 32$ 的范围内,其解是足够精确的。 $\lambda_z = 32$ 时, t 值的误差为 4%~5% (μ 值的影响)。

根据工程一般情况,由上文分析,仅取 $(1.7, \pi)$ 之间的根。得到 t 值(即 kL 值)后,由式(7)即可得出计算长度系数 ζ 。

以上方程的解虽然形式复杂,但易于采用软件批量计算。但应注意适用范围,以免产生较大误差。

3 常用范围数据表

解析法虽然可实现批量计算,但应用范围有限,实际应用中可能会出现 λ_z 大于 32 的情况,会导致误差超过 5%。因此有必要根据滑动支座不同的 μ 值和墩柱的 λ_z 值,编制成数据表格。

以圆柱墩为例,为方便查阅,采用墩高柱径比 $\left(\frac{L}{D}\right)$ 代替 λ_z ,常用范围的计算长度系数如表 1 所示。

英国规范 BS 5400 中规定,对于墩顶产生水平移动的墩柱,其计算长度系数取 1.41,符合墩高在 $8.5D$ 左右的计算长度系数。

表 1 常用尺寸范围摩阻墩计算长度系数表(μ 为摩阻系数)

L/D	不同 μ 值的计算长度系数值						
	0.03	0.04	0.05	0.06	0.078	0.12	0.156
7.0	1.087	1.077	1.071	1.067	1.062	1.056	1.054
7.5	1.218	1.210	1.205	1.203	1.197	1.193	1.190
8.0	1.325	1.319	1.315	1.312	1.310	1.306	1.304
8.5	1.412	1.407	1.404	1.402	1.400	1.397	1.396
9.0	1.483	1.478	1.476	1.475	1.473	1.471	1.470
9.5	1.541	1.538	1.536	1.535	1.533	1.532	1.531
10.0	1.589	1.587	1.586	1.585	1.583	1.583	1.582
10.5	1.630	1.629	1.628	1.627	1.626	1.625	1.624
11.0	1.666	1.664	1.663	1.662	1.662	1.661	1.660
11.5	1.696	1.695	1.694	1.694	1.694	1.693	1.692
12.0	1.722	1.721	1.720	1.720	1.720	1.719	1.719

注:查阅该表时,应特别注意墩高 L 的起算点,并判别摩阻力作用下支座是否发生滑动。