

DOI:10.14048/j.issn.1671-2579.2021.06.039

一种斜拉桥全桥拉索线形参数快速计算方法

官快, 徐德志

(广东省交通规划设计研究院股份有限公司, 广东 广州 510507)

摘要:为高效获取斜拉桥全桥拉索线形参数,给拉索设计施工提供参考,开展拉索线形快速算法研究。首先基于悬链线理论推导了斜拉索无应力长度精确计算公式,其次结合 Excel 平台内置的规划求解模块提出斜拉索线形参数的快速实现方法,最后依托典型斜拉桥工程实例验证了所提方法的有效性。结果表明:采用悬链线无应力长度精确解并结合 Excel 平台能够快速且可靠地得出拉索线形参数。

关键词:桥梁工程;斜拉索;悬链线;无应力长度;规划求解

斜拉索作为斜拉桥主要受力杆件,其线形状态参数的准确性对斜拉桥施工和使用阶段具有重要影响,如斜拉索塔顶下垂角度准确性影响预留孔口大小及角度。对于中小跨径斜拉桥斜拉索线形状态计算大多采用 Ernst 等效模量法,大跨径斜拉桥大多采用迭代算法。迭代算法在工程设计中有各种不同表达形式及其相应固定计算流程,该算法针对每类拉索分别进行计算,通常对每根拉索构造一系列类似迭代公式,迭代计算过程较简单。随着斜拉桥跨度增加,斜拉索根数随之增加,对于多塔斜拉桥及非对称斜拉桥,因每根拉索设计轴力及结构尺寸不同,斜拉索计算总量随拉索根数线性增长。为减小迭代工作的计算量,提高计算效率,迭代公式往往选取拉索伸长值 1 阶近似解,斜拉索无应力长度 1 阶近似值较精确值偏小,两者差值随斜拉索轴力增大而加大,即斜拉索越长、轴力越大 1 阶近似值误差越大。

该文采用悬链线无应力索长精确解,结合 Excel 内置计算模块快速计算出斜拉索线形参数,并采用相关参考文献及竣工项目计算结果验证该文方法的可靠性。采用该文方法计算在建黄茅海跨海通道工程高栏港大桥斜拉索线形参数,以验证该计算方法的高效性。

1 悬链线索长精确计算公式

斜拉索仅在拉索两端受力,斜拉索上只有自重作用,其线形为悬链线,如图 1 所示,相应线形方程表达式为:

$$z = \frac{H}{q} \left[\cosh k_1 - \cosh \left(\frac{q}{H} x - k_1 \right) \right] \quad (1)$$

$$k_1 = \sinh^{-1} \left\{ \frac{cq/(2H)}{\sinh[ql/(2H)]} \right\} + \frac{ql}{2H} \quad (2)$$

式中: x 为拉索节点到索起始端的水平距离; z 为拉索节点到索起始端的竖向距离; H 为拉索拉力水平分力; q 为沿索长均布的拉索自重荷载; c 为拉索两索端点高差; l 为拉索两索端点水平距离。

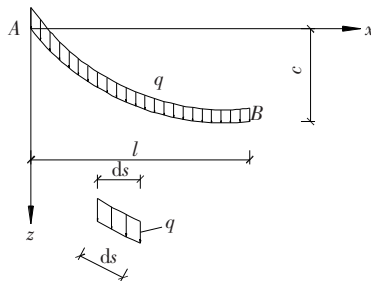


图 1 拉索悬链线受力示意图

斜拉索索长计算内容包括斜拉索有应力长度、斜拉索无应力长度以及斜拉索索长伸长量计算,3 项内容计算出其中两项即可得出第 3 项。其中斜拉索无应力长度计算精度直接影响斜拉索下料及施工安装和调整,对斜拉索线形计算具有重要过渡作用。斜拉索有应力索长为:

$$S = \sqrt{c^2 + 4(H/q)^2 \operatorname{sh}^2[ql/(2H)]} \quad (3)$$

假定索段长 ds 对应的无应力长为 ds_0 ,斜拉索弹性模量为 E ,截面面积为 A ,由胡克定律可得:

$$ds_0 = ds / [1 + T/(EA)] \quad (4)$$

$$ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (5)$$

收稿日期:2021-01-13(修改稿)

作者简介:官快,男,硕士,工程师. E-mail:642770387@qq.com

$$T = H \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad (6)$$

经过推导及积分,可得到无应力索长的精确公式:

$$s_0(x) = \frac{b}{\varepsilon} \left\{ \ln \left[\frac{1 + \varepsilon \operatorname{ch}(x/b+a)}{1 + \varepsilon \operatorname{cha}} \right] + \frac{2x}{b} - \ln \left[\frac{\alpha^2(x) - \beta^2}{\alpha^2(0) - \beta^2} \right] - \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{[\alpha(x) - \beta][\alpha(0) + \beta]}{[\alpha(x) + \beta][\alpha(0) - \beta]} \right] \right\} \quad (7)$$

式中: $b = -H/q$; $\varepsilon = H/(EA)$; $\alpha(x) = \varepsilon \exp(x/c+a) + 1$; $\beta = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ 。

式(7)为斜拉索无应力索长精确计算公式,其表达形式繁琐,常规迭代公式通常取其简化1阶近似解,即对 ds_0 进行级数展开并忽略式中高阶项,其表达式为:

$$ds_0 = \left(1 - \frac{T}{EA} \right) ds \quad (8)$$

通过积分可得斜拉索弹性伸长量 Δs 为:

$$\Delta s = \frac{H}{2EA} \left\{ l + \frac{H}{q} \left[\operatorname{sh}(ql/H) + \left(\frac{qh}{H} \right)^2 \cdot \operatorname{ch}[ql/(2H)] / \operatorname{sh}[ql/(2H)] \right] \right\} \quad (9)$$

斜拉索无应力索长为:

$$s_0 = S - \Delta s \quad (10)$$

2 求解斜拉索水平分力 H

通过全桥计算模型结果可得每根斜拉索塔端锚固点轴向力 N_T , 结合式(1)可计算出斜拉索在塔端锚固点处切线斜率为:

$$z' \Big|_{x=0} = -\sinh \left(\frac{q}{H} x - k_1 \right) \Big|_{x=0} = \sinh k_1 \quad (11)$$

根据力分解原则,可得斜拉索锚固点轴向力 N_T 与锚固点水平力 H 之间的关系为:

$$N_T = H \sqrt{(z' \Big|_{x=0})^2 + 1} = H \sqrt{(\sinh k_1)^2 + 1} = H \operatorname{cosh} k_1 \quad (12)$$

每根拉索均有一不同参数一元超越方程,通过迭代方法可计算出未知参数 H , 全桥拉索需对每根拉索单独计算。利用 Excel 中规划求解组件可高效计算出斜拉桥全桥斜拉索线形状态参数,详细求解计算步骤如下:

(1) 求解拉索塔端锚固点水平分力初始值 H_0 。

结合斜拉索塔端锚固点轴向力 N_T 、斜拉索水平投影长度 l 以及竖向投影高度 h , 可得拉索塔端锚固点水平分力初始值 H_0 :

$$H_0 = N_T \sin \alpha_0 \quad (13)$$

式中: $\alpha_0 = \tan^{-1}(h/l)$, 为斜拉索两锚固点连线水平

夹角。

(2) 求解拉索塔端锚固点轴力初始值 N_{T_0} 。

通过拉索线形方程可得拉索在塔端斜率计算公式,如式(14),利用三角函数关系可得水平力与轴向力间的几何关系,如式(15):

$$z' \Big|_{x=0} = -\sinh \left(\frac{q}{H} x - k_1 \right) \Big|_{x=0} = \sinh k_1 \quad (14)$$

$$N_{T_0} = H_0 \sqrt{(z' \Big|_{x=0})^2 + 1} = H_0 \sqrt{(\sinh k_1)^2 + 1} = H_0 \operatorname{cosh} k_1 \quad (15)$$

(3) 求解斜拉索成桥塔端轴向力

利用 Excel 中的规划求解功能,将斜拉索水平力 H 设置为可变单元格。求解目标:使得采用水平力 H 计算塔端轴向力 N_{T_0} 与全桥计算模型得出的 N_T 基本相等,即两者间差值在可接受范围内,两者绝对差值(即 $|N_{T_0} - N_T|$) 设置为目标函数。约束条件设置为 $|N_{T_0} - N_T|$ 小于某可接受数值,因约束条件影响求解收敛,其可接受数值应酌情选取。利用规划求解获得塔端轴向力水平分力 H 及其对应的塔端锚固处拉索轴向力 N_T 。

(4) 求解全桥斜拉索成桥塔端轴向力水平分力 H_i 。

类似单根斜拉索求解方法,将全桥拉索参数信息汇总,可变单元格设置为全桥拉索塔端轴向力水平分力 H_i , 目标函数设置为全桥拉索计算轴力与已知轴力绝对差值之和,即 $\sum |N_{T_{0i}} - N_{T_i}|$ 。约束条件设置为 $\sum |N_{T_{0i}} - N_{T_i}|$ 小于某可接受值,利用规划求解模块计算全桥各斜拉索塔端轴向力水平分力 H_i 。

(5) 求解全桥斜拉索成桥状态参数

通过前述步骤可求得各斜拉索塔端锚固处轴向力 N_T 及斜拉索水平分力 H 。根据力分解原则求出塔端锚固处斜拉索竖向分力 V_T , 通过拉索竖向力平衡方程及无应力索长公式(7)求出斜拉索梁端锚固处竖向分力为:

$$V_B = V_T - qs_0 \quad (16)$$

斜拉索索长范围内水平分力保持一致,通过斜拉索梁端锚固处轴向力 V_T 及水平分力 H 求得斜拉索梁端锚固处轴向力 N_B 。

3 斜拉索成桥状态直观表述

斜拉桥拉索成桥状态在确定塔端轴向力后便是一个确定的状态,拉索除锚固与张拉端以外拉索所受的

荷载为沿索长均匀分布的自重,故其成桥状态受力可以简化为承受沿弧长的均布荷载,如图 2 所示。成桥状态的计算即为求这种柔性索结构的状态参数,即拉索线形与悬索桥空缆线形计算方法一致,单主跨悬索桥空缆线形在两 IP 点及矢跨比确定之后便为一确定状态。斜拉索两端位置为设计确定量,类似两 IP 点,仅需额外确定矢跨比即可确定斜拉索最终状态,斜拉索无矢跨比参数,斜拉索张拉端的轴向力是确定的,3 个已知变量便可最终确定斜拉索线形状态。

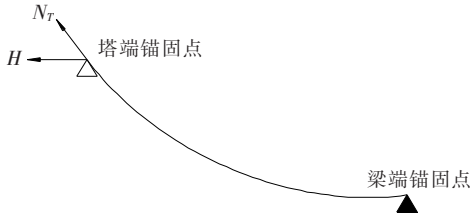


图 2 斜拉索试算示意图

斜拉索成桥状态等同于悬索桥主缆空缆状态,通过悬索桥的空缆线形找形方法即可获得斜拉索线形状态。斜拉索找形关键在于确定其水平分力,通过多次“试算”计算出水平力 H 大小。试算过程简述如下:

将斜拉索视为一柔性索结构,其梁端位置固定于主梁(梁端锚固点),塔端位置假定有一孔洞,斜拉索在塔端穿过这一孔洞并在其端部施加一大小为 H 的水平作用力。伴随水平力 H 变化拉索出现不同形态,拉索每个形态都固定通过梁端锚固点及塔端锚固点。斜拉索在塔端锚固点处的切线方向的水平夹角随着 H 的变化不断改变,当 H 达到某个数值,其塔端锚固点设计轴向力水平分量与此时 H 大小一致,此水平力 H 即为拉索水平分力,此状态即为拉索合理线形状态。

4 计算示例

4.1 相关文献对比

选取文献[8]中的算例对该计算方法进行校核,斜拉索规格为 PES-7-223,斜拉索两锚固点高差 $h = 74.971$ m,拉索两锚点水平距离: $l = 160.776$ m,拉索截面积 $A = 0.008582$ m²,弹性模量 $E = 1.95 \times 10^5$ MPa,斜拉索沿弧长的恒载集度 $q = 715.838$ N/m,塔端张拉力为: $N_T = 4736$ kN。

初始迭代水平力: $H_0 = N_T * \cos[\arctan(h/l)] = 4292.27$ kN,通过式(2)、(11)、(12)可得拉索首次塔端轴向力迭代值 $N_{T_0} = 4763.23$ kN,首次迭代值与塔

端实际张拉力不能闭合,故需进行迭代计算。采用 Excel 平台内置的规划求解模块,如图 3 所示,将 $\Delta N = N_T - N_{T_0}$ 设置为目标单元格,可变单元格设置为拉索水平分力 H ,塔端张拉力与首次塔端轴向力迭代值的差值绝对值(即 $|\Delta N| = |N_T - N_{T_0}|$) 小于 0.1 kN 作为约束条件,即可求出斜拉索水平分力 $H = 4233.87$ kN,对应无应力索长为 $s_0 = 176.915$ m,计算时长约为 3 s。

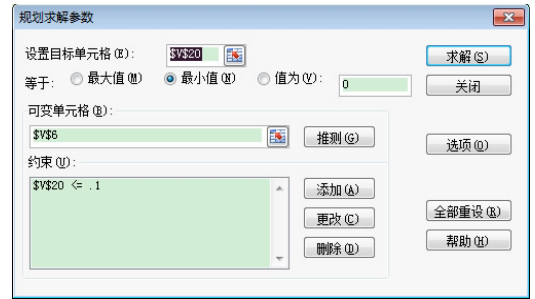


图 3 Excel 平台内置的规划求解模块界面

文献[8]计算的拉索无应力长度为 176.902 m,采用该文方法计算精确解为 176.915 m,误差为 0.0073%。计算结果及计算耗时证明此方法准确及高效。

4.2 广佛江快速通道江顺大桥

江顺大桥主桥桥跨布置为(60+176) m+700 m+(176+60) m,采用混合梁方案,钢-混结合点设在距辅助墩向主塔方向 18 m 处,主桥最大纵坡 2.8%。采用半漂浮体系,主塔处设带限位功能的纵向阻尼器(图 4)。

斜拉索采用空间索面扇形布置,每索面 22 根,全桥共 176 根索。梁上索距 15 m,混凝土梁上索距 6 m。斜拉索均采用 $\phi 7$ mm 平行钢丝组成的成品索,最长约 377 m,最大规格为 PES7-313,单根最大重量(不计锚具)约为 37.9 t。

采用该文计算方法及施工图计算结果对比如表 1 所示。

由表 1 可知:该文方法与施工图计算所得无应力长度相对差值大部分小于 0.1%,拉索无应力索长最大差值不超过 0.15%;塔端夹角相对差值绝大部分小于 0.7%,最大相对差值为 0.93%,该文计算结果的准确性得以论证。

4.3 黄茅海跨海通道高栏港大桥

高栏港大桥采用双塔双索面钢箱梁斜拉桥,跨径组合为:(110+248+700+248+110) m。主梁采用流线形扁平钢箱梁。斜拉索采用空间双索面形式,每

个塔上各有 23 对斜拉索,塔上索距为 3~3.5 m。普通斜拉索梁上索距为 15 m,主塔位置无索区长度为 25 m。主塔处斜拉索直接锚固于内塔壁处钢锚梁上,梁上斜拉索锚固于风嘴内,采用锚箱式锚固方案,张拉端设于塔上(图 5)。

全桥共 $2 \times 4 \times 23 = 184$ 根斜拉索,最长为 388.6 m,最大规格为 PES7-253,单根最大重量(不计锚具)为 29.7 t,根据索力分为 PES7-121、PES7-139、PES7-163、PES7-187、PES7-211、PES7-223、PES7-253 共 7 种规格。斜拉索计算结果见表 2。

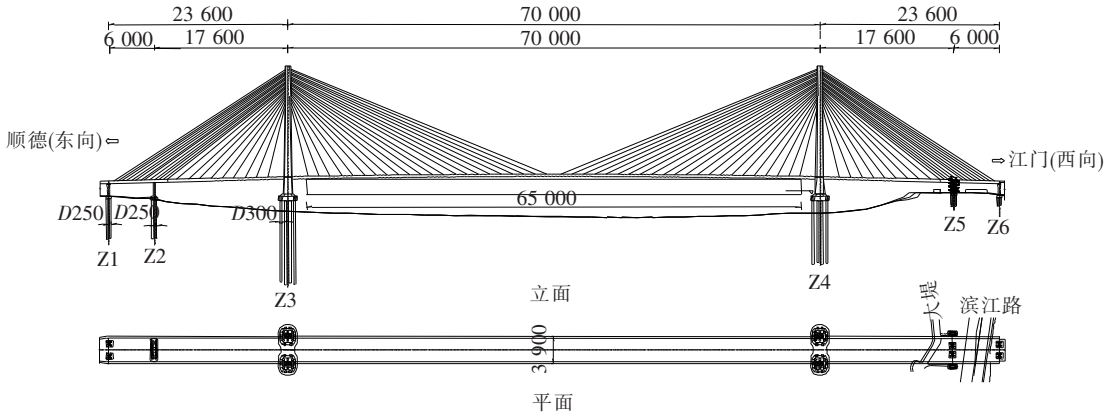


图 4 江顺大桥主桥桥型布置图(单位:cm)

表 1 江顺大桥斜拉索计算结果汇总

拉索 编号	拉索型号	施工图	该文方法	无应力索 长相对差 值/%	施工图	该文方法	塔端夹 角相对差 值/%
		无应力 索长/m	无应力 索长/m		塔端夹 角/(°)	塔端夹角/ (°)	
B22	LPES7-313	280.082	279.928	0.06	53.360	53.587	0.42
B21	LPES7-313	273.730	273.581	0.05	53.084	53.309	0.42
B20	LPES7-313	267.386	267.146	0.09	52.791	53.126	0.63
B19	LPES7-313	261.050	260.821	0.09	52.483	52.815	0.63
B18	LPES7-313	254.721	254.502	0.09	52.161	52.490	0.63
B17	LPES7-313	248.390	248.177	0.09	51.845	52.165	0.61
B16	LPES7-283	242.039	241.894	0.06	51.574	51.783	0.40
B15	LPES7-283	235.744	235.483	0.11	51.189	51.538	0.68
B14	LPES7-283	229.480	229.242	0.10	50.737	51.100	0.71
B13	LPES7-283	223.171	222.853	0.14	50.292	50.763	0.93
B12	LPES7-223	216.819	216.637	0.08	50.038	50.281	0.48
B11	LPES7-223	210.583	210.414	0.08	49.545	49.790	0.49
B10	LPES7-223	205.579	205.425	0.07	49.236	49.493	0.52
B9	LPES7-163	192.807	192.807	0.00	47.717	47.715	0.00
B8	LPES7-163	179.917	179.850	0.04	45.299	45.394	0.21
B7	LPES7-163	167.408	167.347	0.04	42.498	42.585	0.21
B6	LPES7-163	155.348	155.293	0.04	39.239	39.316	0.20
B5	LPES7-163	143.908	143.811	0.07	35.428	35.557	0.36
B4	LPES7-127	133.200	133.185	0.01	31.048	31.061	0.04
B3	LPES7-127	123.297	123.284	0.01	25.873	25.884	0.04
B2	LPES7-127	114.574	114.564	0.01	19.864	19.873	0.04
B1	LPES7-199	107.270	107.119	0.14	13.242	13.294	0.39

注:表中拉索为边跨拉索。

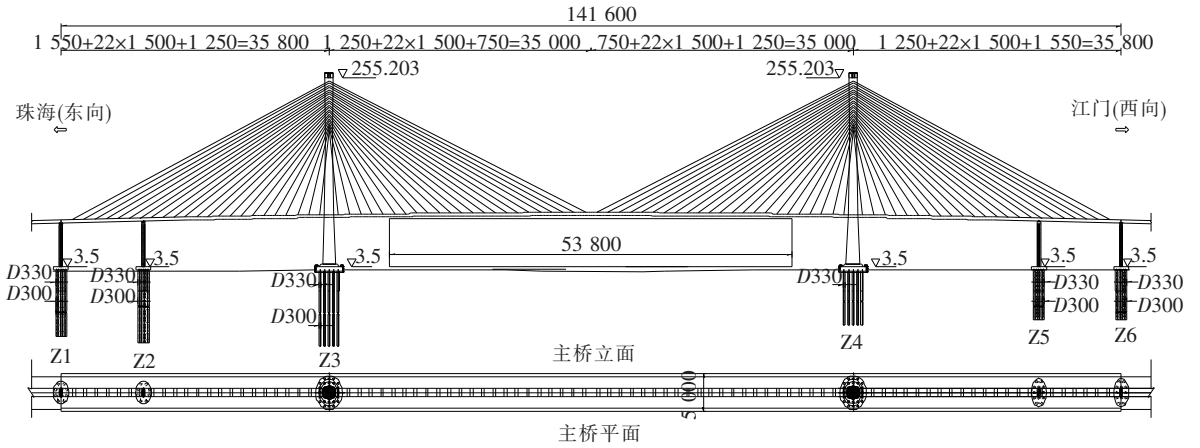


图 5 高栏港大桥桥型布置图(单位:cm)

表 2 高栏港大桥斜拉索计算结果汇总

拉索编号	拉索型号	塔端轴力/ kN	梁端轴力/ kN	无应力索 长/m	塔端夹角/ (°)	梁端夹角/ (°)
B0	LPES7-139	2 831.328	2 779.666	117.756	11.773	78.005
B1	LPES7-121	2 768.746	2 723.796	120.281	16.214	73.511
B2	LPES7-121	2 720.639	2 674.377	127.553	21.177	68.439
B3	LPES7-121	2 697.587	2 649.870	136.444	25.863	63.636
B4	LPES7-121	2 825.749	2 776.776	145.978	30.236	59.174
B5	LPES7-121	2 626.605	2 576.359	156.487	34.089	55.151
B6	LPES7-139	2 936.138	2 876.829	167.730	37.484	51.604
B7	LPES7-139	3 046.573	2 985.807	179.552	40.487	48.510
B8	LPES7-139	3 189.193	3 126.966	191.866	43.127	45.795
B9	LPES7-163	3 596.638	3 521.918	204.635	45.401	43.353
B10	LPES7-163	3 665.959	3 589.512	217.708	47.433	41.221
B11	LPES7-163	3 323.154	3 244.948	231.136	49.142	39.235
B12	LPES7-163	3 579.442	3 499.509	244.456	50.739	37.631
B13	LPES7-163	3 882.694	3 801.038	258.181	52.220	36.162
B14	LPES7-187	4 105.786	4 010.540	272.199	53.419	34.706
B15	LPES7-187	3 930.641	3 833.393	286.329	54.510	33.398
B16	LPES7-223	4 563.957	4 445.588	300.568	55.499	32.214
B17	LPES7-223	4 561.786	4 441.031	314.890	56.419	31.156
B18	LPES7-223	4 723.339	4 600.222	329.271	57.298	30.230
B19	LPES7-223	4 868.531	4 743.049	343.731	58.098	29.377
B20	LPES7-223	5 090.577	4 962.738	358.242	58.853	28.611
B21	LPES7-253	5 429.360	5 282.889	372.930	59.421	27.774
B22	LPES7-253	5 448.25	5 299.113	387.603	60.010	27.065

采用该文所述方法计算出高栏港大桥全桥斜拉索成桥状态参数耗时为 3 min,采用常规逐根迭代计算拉索状态参数的方式每根拉索耗时 2 min,全桥 23 根

拉索总耗时 46 min,该文所述方法耗时约为常规方法的 1/15,计算效率提高明显。随着拉索数量的增加,效率提升更加明显。