

# 组合荷载作用下基桩水平承载特性的简化半解析解

饶文昌<sup>1</sup>, 竺明星<sup>2\*</sup>

(1. 江苏开放大学 建筑工程学院, 江苏 南京 210019; 2. 江苏科技大学 土木工程与建筑学院)

**摘要:**为研究桩身轴力的存在对水平受荷桩承载特性的影响,该文首先引入附加弯矩的概念并建立相应的桩身轴力引起的附加弯矩表达式。随后在传递矩阵法原理基础上,采用 Laplace 正逆变换分别求得地面上自由段、地面下弹性段以及塑性桩的简化传递矩阵系数解析解。与既有文献中传递矩阵系数解析解相比,该文方法所得解的形式更加简洁,且克服了文献解中轴力不能为 0 的缺陷。通过案例分析验证了该文解的正确性。最后开展了桩顶竖向荷载以及桩嵌入比对水平承载特性和附加弯矩影响的分析。结果表明:桩顶变形以及附加弯矩均随桩嵌入比的减小、桩顶竖向荷载的增加而增加,但当嵌入比为 0.9~1.0 时,桩顶水平变形几乎不受桩顶竖向荷载作用的影响;当嵌入比较小且存在桩顶竖向荷载作用,则需要考虑  $p-\Delta$  效应对桩水平承载力的影响。

**关键词:** 组合受荷桩; 附加弯矩; 传递矩阵法; 嵌入比

## 1 前言

随着工程需求的变化以及基桩承载特性理论研究的逐步深入,现实工程中的桩基通常不但承担桩顶竖向荷载作用,还同时受到水平荷载作用,即组合荷载的作用,如桥梁桩基础,海上风机单桩基础等。当桩身产生水平挠曲变形时,由于竖向荷载的存在会对桩身产生不利影响的附加弯矩,即  $p-\Delta$  效应,这类问题引起了越来越多的学者关注。

对于组合作用下基桩承载机理,目前已有许多学者开展了相关的试验研究、数值分析和理论研究工作。Anagnostopoulos 与 Georgiadis、皇甫明等、梁发云等均开展了竖向荷载对水平受荷桩影响的室内模型试验。试验结果均表明:竖向荷载的存在对水平受荷桩的桩身弯矩有一定的影响,但不大;赵明华与吴鸣等开展了轴、横向荷载下桥梁基桩的试验研究,结果表明:在基桩自由长度和轴向荷载较大时,由于  $p-\Delta$  效应,桩身最大弯矩和桩顶位移提高很大,在设计计算中不容忽视;Achmus 等采用三维有限元分析了组合荷载作用单桩承载特性,研究结果表明:竖向荷载对水平受荷桩影响很小;Poulos、梁发云等根据弹性地基梁模型

建立了组合受荷桩承载特性的解析模型并采用有限单元法进行求解,计算表明:轴向荷载的存在对于柔性桩上部的内力和侧向挠曲影响比较显著,而对其深部的影响相对较小,且认为轴向力作为常量的假设一般可以满足工程实际要求;赵明华等采用有限层单元法和改进有限杆单元法分析了倾斜荷载作用下基桩受力特性并指出  $p-\Delta$  效应受多种因素影响且不容忽视;Zhu 等根据传递矩阵法求得组合荷载作用下基桩桩身响应半解析解并得出  $p-\Delta$  效应受桩的嵌入比影响显著的结论。

该文基于传递矩阵原理,采用 Laplace 正逆变换方法推导出简化的组合荷载作用下桩身传递矩阵系数,并通过迭代求解得出桩身响应。通过案例对比分析验证该文方法和解的正确性。最后开展竖向荷载对水平受荷桩承载特性影响分析。

## 2 桩身响应模型建立与求解

### 2.1 桩身受力模型

如图 1 所示,总桩长为  $L$  的基桩垂直嵌入到成层地基土中。地面上桩长为  $L_a$ ,地面下桩长为  $L_b$ 。地面上桩因等直变截面被等分为  $n_a$  段,则等分后每段桩

收稿日期:2021-05-21(修改稿)

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金资助项目(编号:51808112);江苏省基础研究计划项目(编号:BK20180155)

作者简介:饶文昌,男,大学本科,副教授/高级工程师。E-mail: 976260989@qq.com

\* 通信作者:竺明星,男,博士(后),副教授。E-mail: mxingzhu@just.edu.cn

的长度、桩径和抗弯刚度分别为  $H_{ai}$ 、 $d_{ai}$  和  $EI_{ai}$ 。地面下的桩被成层地基土和等直变截面分成  $n_b$  层,则每段桩的桩长、桩径和抗弯刚度分别为  $H_{bi}$ 、 $d_{bi}$  和  $EI_{bi}$ ;桩顶分别作用竖向荷载  $V_i$ 、水平荷载  $F_i$  和弯矩荷载  $M_i$ ;桩侧受到分布荷载  $q_a$  的作用。推导过程中桩身变形  $y$  以向右为正,转角  $\theta$  以逆时针旋转为正;桩顶水平力  $F_i$  与桩身截面剪力  $Q$  以绕研究对象顺时针旋转为正;桩顶弯矩  $M_i$  与桩身截面弯矩  $M$  以研究对象右侧受压为正;地面上桩侧分布荷载  $q_a$  以向右作用为正;桩侧土抗力以向左为正。

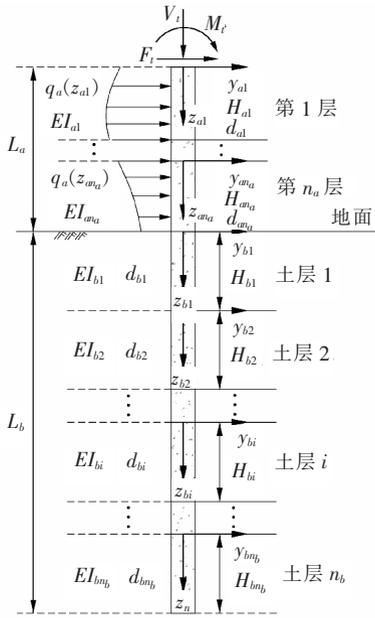


图1 成层地基土中桩身受力分析

## 2.2 地面上桩身传递矩阵系数求解

### 2.2.1 地面上任意截面处桩身受力模型

取地面上桩任意深度处微单元进行受力分析,如图2所示,图中所有物理量的符号均为正。

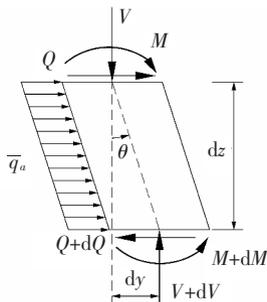


图2 地面上桩微单元受力分析

根据图2中桩身微单元水平方向受力平衡得:

$$\frac{dQ}{dz} = \bar{q}_a \quad (1)$$

式中:  $\bar{q}_a$  为该微单元桩侧所受的分布荷载平均值。

根据桩身微单元弯矩平衡可得:

$$\frac{dM}{dz} = Q - V \frac{dy}{dz} \quad (2)$$

从图2可知:桩身轴力荷载会产生一个附加弯矩  $Vdy$  作用;同时由于  $\theta = dy/dz$ ,因此令:

$$M_{va} = V\theta \quad (3)$$

式中:  $M_{va}$  定义为竖向荷载引起的附加弯矩,单位量纲为[力×长度/长度],其物理含义为沿桩身深度分布的单位长度附加弯矩作用。

将式(3)代入式(2)可得:

$$\frac{dM}{dz} = Q - M_{va} \quad (4)$$

### 2.2.2 地面上任意深度处桩身传递矩阵系数求解

如图3所示为地面上自由段桩离散示意图。

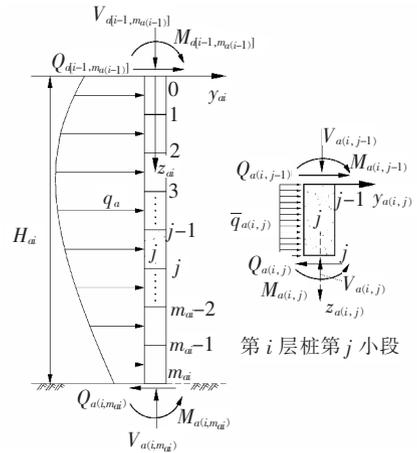


图3 地面上桩离散示意图

采用 Laplace 正逆变换方法推导地面上桩身传递矩阵系数,根据图3建立如下微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy_{a(i, j)}}{dz_{a(i, j)}} = \theta_{a(i, j)} \\ \frac{d\theta_{a(i, j)}}{dz_{a(i, j)}} = \frac{M_{a(i, j)}}{EI_{ai}} \\ \frac{dM_{a(i, j)}}{dz_{a(i, j)}} = Q_{a(i, j)} - \bar{M}_{va(i, j)} \\ \frac{dQ_{a(i, j)}}{dz_{a(i, j)}} = \bar{q}_a(i, j) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $y_{a(i, j)}$ 、 $\theta_{a(i, j)}$ 、 $M_{a(i, j)}$  和  $Q_{a(i, j)}$  分别为第  $i$  层桩(根据直径进行分层)中第  $j$  小段桩(等分数量为  $m_{ai}$ )的桩端位移、转角、弯矩和剪力,如图3所示。

$\bar{q}_a(i, j)$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的桩侧平均分布荷载作用,采用下式进行计算:

$$\bar{q}_a(i, j) = [q_{a(i, j-1)} + q_{a(i, j)}] / 2 \quad (6)$$

式中:  $q_{a(i,j-1)}$  和  $q_{a(i,j)}$  分别为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的顶部与底部位置处分布荷载。

$\bar{M}_{va(i,j)}$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的桩身平均附加弯矩作用, 采用下式进行计算:

$$\bar{M}_{va(i,j)} = (M_{va(i,j-1)} + M_{va(i,j)})/2 \quad (7)$$

式中:  $M_{va(i,j-1)}$  和  $M_{va(i,j)}$  分别为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的顶部与底部位置处附加弯矩。

$M_{va(i,j)}$  采用下式进行计算:

$$M_{va(i,j)} = V_{a(i,j)} \theta_{a(i,j)}^{(前)} \quad (8)$$

式中:  $V_{a(i,j)}$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的底部位置处桩身轴向荷载。赵明华、文献[13,15]均假定地面上桩身轴力因桩体自重随深度呈线性变化, 则得:

$$V_{a(i,j)} = V_t + \sum_{k=1}^{i-1} \psi_{ak} H_{ak} + \psi_{ai} z_{a(i,j)} \quad (9)$$

式中:  $z_{a(i,j)}$  为从第  $i$  层桩顶至第  $j$  小段桩段的深度;  $\psi_{ai}$  ( $=\gamma_{ai} A_{sai}$ ) 为地面上第  $i$  层桩的桩身轴力增长系数,  $\gamma_{ai}$  和  $A_{sai}$  分别为地面上第  $i$  层桩的桩有效重度与横截面积;  $\psi_{ak}$  为地面上第  $k$  层 ( $k=1, \dots, i-1$ ) 桩的桩身轴力增长系数;  $H_{ak}$  为等分后地面上第  $k$  层 ( $k=1, \dots, i-1$ ) 桩的长度。

而  $\theta_{a(i,j)}^{(前)}$  则为前一次计算结果中第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩底部位置处的转角值; 如果是第一次计算, 则设  $\theta_{a(i,j)}^{(前)}$  值为 0。联合式(7)~(9)可知桩身平均附加弯矩作用  $\bar{M}_{va(i,j)}$  值为一个已知的常数。

根据文献[13,15]对公式(5)进行 Laplace 正逆变换后可得:

$$S_{a(i,j)} = U_{a(i,j)} S_{a(i,j-1)} \quad (10)$$

式中:  $U_{a(i,j)}$  为地面上第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的桩身传递矩阵系数, 如式(11)所示:

$$U_{a(i,j)} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & h_{ai} & \frac{h_{ai}^2}{2EI_{ai}} & \frac{h_{ai}^3}{6EI_{ai}} & \frac{\bar{q}_{a(i,j)} h_{ai}^4 - 4\bar{M}_{va(i,j)} h_{ai}^3}{24EI_{ai}} \\ 0 & 1 & \frac{h_{ai}}{EI_{ai}} & \frac{h_{ai}^2}{2EI_{ai}} & \frac{\bar{q}_{a(i,j)} h_{ai}^3 - 3\bar{M}_{va(i,j)} h_{ai}^2}{6EI_{ai}} \\ 0 & 0 & 1 & h_{ai} & \frac{\bar{q}_{a(i,j)} h_{ai}^2 - 2\bar{M}_{va(i,j)} h_{ai}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{q}_{a(i,j)} h_{ai} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中:  $h_{ai}$  ( $=H_{ai}/m_{ai}$ ) 为地面上长度为  $H_{ai}$  的第  $i$  层桩经过等分数量为  $m_{ai}$  等分后每小段长度;  $S_{a(i,j)}$  和  $S_{a(i,j-1)}$  分别为:

$$S_{a(i,j)} = [y_{a(i,j)} \quad \theta_{a(i,j)} \quad M_{a(i,j)} \quad Q_{a(i,j)} \quad 1]^T \quad (12a)$$

$$S_{a(i,j-1)} = [y_{a(i,j-1)} \quad \theta_{a(i,j-1)} \quad M_{a(i,j-1)} \quad Q_{a(i,j-1)} \quad 1]^T \quad (12b)$$

通过与文献[13,15]对比发现: 该文式(11)的形式非常简洁; 更重要的是该文解克服了文献[13,15]中自由段桩身传递矩阵系数轴力不能为 0 的局限性。因此, 该文式(11)的解更具有实用性。

## 2.3 地面下弹性段桩身传递矩阵系数求解

### 2.3.1 弹性段范围内任意截面处桩身受力模型

取地面下桩土相互作用处于弹性阶段范围内的桩任意深度处一微单元进行受力分析, 如图 4 所示, 图中所有物理量的符号均为正。

根据图 4 中桩身微单元水平方向受力平衡得:

$$\frac{dQ}{dz} = -\bar{p}_e = -k y_e \quad (13)$$

式中,  $\bar{p}_e$  为该微单元桩侧土抗力模量平均值。

根据桩身微单元弯矩平衡可得:

$$\frac{dM}{dz} = Q - M_{ve} \quad (14)$$

式中:  $M_{ve}$  为竖向荷载引起的弹性范围内桩身附加弯矩作用。

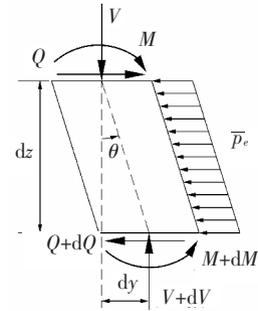


图 4 弹性段桩微单元受力分析

### 2.3.2 弹性段桩身传递矩阵系数求解

如图 5 所示为地面下弹性段桩离散示意图。

为采用 Laplace 正逆变换方法推导弹性段桩身传递矩阵系数, 建立如下微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = \theta_{e(i,j)} \\ \frac{d\theta_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = \frac{M_{e(i,j)}}{EI_{bi}} \\ \frac{dM_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = Q_{e(i,j)} - \bar{M}_{ve(i,j)} \\ \frac{dQ_{e(i,j)}}{dz_{e(i,j)}} = -\bar{k}_{(i,j)} y_{e(i,j)} \end{cases} \quad (15)$$

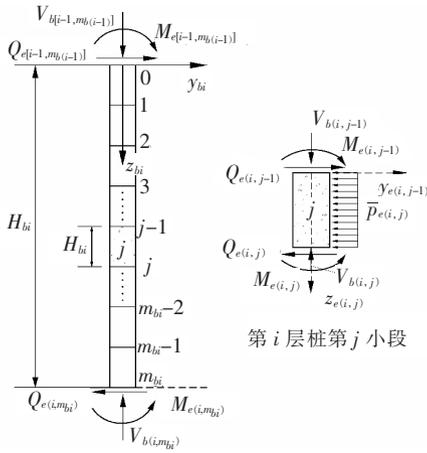


图5 地面下弹性阶段桩离散示意图

式中:  $y_{e(i, j)}$ 、 $\theta_{e(i, j)}$ 、 $M_{e(i, j)}$  和  $Q_{e(i, j)}$  分别为处于弹性阶段的第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩(等分数量为  $m_{bi}$ )的桩端位移、转角、弯矩和剪力(图5)。

$\bar{k}_{(i, j)}$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的桩侧平均土抗力模量,采用下式计算:

$$\bar{k}_{(i, j)} = (k_{(i, j-1)} + k_{(i, j)}) / 2 \quad (16)$$

式中:  $k_{(i, j-1)}$  和  $k_{(i, j)}$  分别为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的顶部与底部位置处土抗力模量。

$\bar{M}_{ve(i, j)}$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩(处于弹性阶段)的桩身平均附加弯矩作用,采用下式计算:

$$\bar{M}_{ve(i, j)} = [V_{b(i, j-1)} \theta_{e(i, j-1)}^{(前)} + V_{b(i, j)} \theta_{e(i, j)}^{(前)}] / 2 \quad (17)$$

$$U_{e(i, j)} = \begin{bmatrix} \varphi_{1(i, j)} & \frac{\varphi_{2(i, j)}}{2\beta_{(i, j)}} & \frac{2\beta_{(i, j)}^2 \varphi_{3(i, j)}}{\bar{k}_{(i, j)}} & \frac{-\beta_{(i, j)} \varphi_{4(i, j)}}{\bar{k}_{(i, j)}} & \chi_{1(i, j)} \\ \beta_{(i, j)} \varphi_{4(i, j)} & \varphi_{1(i, j)} & \frac{2\beta_{(i, j)}^3 \varphi_{2(i, j)}}{\bar{k}_{(i, j)}} & \frac{2\beta_{(i, j)}^2 \varphi_{3(i, j)}}{\bar{k}_{(i, j)}} & \chi_{2(i, j)} \\ \frac{-\bar{k}_{(i, j)} \varphi_{3(i, j)}}{2\beta_{(i, j)}^2} & \frac{\bar{k}_{(i, j)} \varphi_{4(i, j)}}{4\beta_{(i, j)}^3} & \varphi_{1(i, j)} & \frac{\varphi_{2(i, j)}}{2\beta_{(i, j)}} & \chi_{3(i, j)} \\ \frac{-\bar{k}_{(i, j)} \varphi_{2(i, j)}}{2\beta_{(i, j)}} & \frac{-\bar{k}_{(i, j)} \varphi_{3(i, j)}}{2\beta_{(i, j)}^2} & \beta_{(i, j)} \varphi_{4(i, j)} & \varphi_{1(i, j)} & \chi_{4(i, j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中  $\chi_{1(i, j)}$ 、 $\chi_{2(i, j)}$ 、 $\chi_{3(i, j)}$  和  $\chi_{4(i, j)}$  分别为:

$$\begin{cases} \chi_{1(i, j)} = \bar{M}_{ve(i, j)} \beta_{(i, j)} \varphi_{4(i, j)} / \bar{k}_{(i, j)} \\ \chi_{2(i, j)} = -2\bar{M}_{ve(i, j)} \beta_{(i, j)}^2 \varphi_{3(i, j)} / \bar{k}_{(i, j)} \\ \chi_{3(i, j)} = -\bar{M}_{ve(i, j)} \varphi_{2(i, j)} / (2\beta_{(i, j)}) \\ \chi_{4(i, j)} = -\bar{M}_{ve(i, j)} (\varphi_{1(i, j)} - 1) \end{cases} \quad (22)$$

上述两式中:  $\varphi_{1(i, j)}$ 、 $\varphi_{2(i, j)}$ 、 $\varphi_{3(i, j)}$  以及  $\varphi_{4(i, j)}$  分别为:

式中:  $V_{b(i, j)}$  为第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的底部位置处桩身轴向荷载。文献[13, 15, 17]均假定地面上桩身轴力因桩体自重和桩侧摩阻力随深度呈线性变化,则得:

$$V_{b(i, j)} = V_t + \sum_{k=1}^n \psi_{ak} H_{ak} + \sum_{l=1}^{i-1} \psi_{bl} H_{bl} + \psi_{bi} z_{e(i, j)} \quad (18)$$

式中:  $z_{e(i, j)}$  为从第  $i$  层桩顶至第  $j$  小段桩段的深度;  $\psi_{bi}$  为地面下第  $i$  层桩的桩身轴力增长系数,采用如下公式计算:

$$\psi_{bi} = \gamma_{bi} A_{sbi} - \mu \tau_{\max} / 2 \quad (19)$$

式中:  $\gamma_{bi}$  和  $A_{sbi}$  分别为地面下第  $i$  层桩的有效重度与横截面面积;  $\mu$  为桩身横截面周长;  $\tau_{\max}$  为第  $i$  层桩一土极限侧摩阻力。需要注意的是:如果式(17)计算所得桩身轴力  $V_{b(i, j)}$  小于0,则取  $V_{b(i, j)} = 0$ 。

$\theta_{e(i, j)}^{(前)}$  则为前一次计算结果中的第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩的底部位置处的转角值;如果是第一次计算,则设  $\theta_{e(i, j)}^{(前)}$  值为0。联合式(16)~(18)可知:桩身平均附加弯矩作用  $\bar{M}_{ve(i, j)}$  值为一个已知的常数。

令:  $\beta_{(i, j)}^4 = \bar{k}_{(i, j)} / (4EI_{bi})$ , 根据文献[13, 15]对式(15)进行 Laplace 正逆变换后可得:

$$S_{e(i, j)} = U_{e(i, j)} S_{e(i, j-1)} \quad (20)$$

式中:  $U_{e(i, j)}$  为地面下第  $i$  层桩中第  $j$  小段桩(处于弹性阶段)的桩身传递矩阵系数,如下式所示:

$$\begin{cases} \varphi_{1(i, j)} = \text{cost}_{(i, j)} \text{cosht}_{(i, j)} \\ \varphi_{2(i, j)} = \text{cost}_{(i, j)} \text{sinht}_{(i, j)} + \text{sint}_{(i, j)} \text{cosht}_{(i, j)} \\ \varphi_{3(i, j)} = \text{sint}_{(i, j)} \text{sinht}_{(i, j)} \\ \varphi_{4(i, j)} = \text{cost}_{(i, j)} \text{sinht}_{(i, j)} - \text{sint}_{(i, j)} \text{cosht}_{(i, j)} \end{cases} \quad (23)$$

其中:  $t_{(i, j)} = \beta_{(i, j)} h_{bi}$ ;  $h_{bi} (= H_{bi} / m_{bi})$  为地面下第  $i$  层长度为  $H_{bi}$  的桩经过  $m_{bi}$  数量等分后每小段长度。  $S_{e(i, j)}$  和  $S_{e(i, j-1)}$  扩充为5阶向量后如下所示:

$$S_{e(i, j)} = [y_{e(i, j)} \quad \theta_{e(i, j)} \quad M_{e(i, j)} \quad Q_{e(i, j)} \quad 1]^T \quad (24a)$$

$$S_{e(i,j-1)} =$$

$$[y_{e(i,j-1)} \quad \theta_{e(i,j-1)} \quad M_{e(i,j-1)} \quad Q_{e(i,j-1)} \quad 1]^T \quad (24b)$$

通过与文献[13,15]对比发现:该式(21)~(23)极大地简化了考虑轴力作用时弹性段传递矩阵系数解的形式;更克服了文献[13,15]中弹性段传递矩阵系数轴力不能等于0的局限性。因此,该式(21)、(22)的解更具有通用性。

### 2.4 地面下塑性段桩身传递矩阵系数求解

#### 2.4.1 塑性段范围内任意截面处桩身受力模型

取地面下桩土相互作用处于塑性阶段范围内的桩任意深度处一微单元进行受力分析,如图6所示,图中所有物理量的符号均为正。

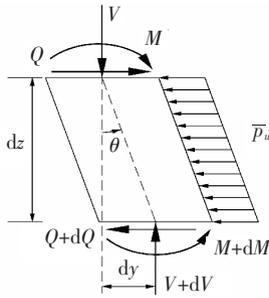


图6 塑性段桩微单元受力分析

根据图6中桩身微单元水平方向受力平衡得:

$$\frac{dQ}{dz} = -\bar{p}_u \quad (25)$$

式中: $\bar{p}_u$ 为该微单元桩侧极限土抗力平均值。

根据桩身微单元弯矩平衡可得:

$$\frac{dM}{dz} = Q - M_{vp} \quad (26)$$

式中: $M_{vp}$ 为竖向荷载引起的塑性范围内桩身附加弯矩作用。

#### 2.4.2 塑性段桩身传递矩阵系数求解

如图7所示为地面下塑性段桩离散示意图。

根据图7建立如下微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dy_{p(i,j)}}{dz_{p(i,j)}} = \theta_{p(i,j)} \\ \frac{d\theta_{p(i,j)}}{dz_{p(i,j)}} = \frac{M_{p(i,j)}}{EI_{bi}} \\ \frac{dM_{p(i,j)}}{dz_{p(i,j)}} = Q_{p(i,j)} - \bar{M}_{vp(i,j)} \\ \frac{dQ_{p(i,j)}}{dz_{p(i,j)}} = -\bar{p}_{u(i,j)} \end{cases} \quad (27)$$

式中: $y_{p(i,j)}$ 、 $\theta_{p(i,j)}$ 、 $M_{p(i,j)}$ 和 $Q_{p(i,j)}$ 分别为处于塑性阶段的第*i*层桩中第*j*小段桩(等分数量为 $m_{bi}$ )的桩

端位移、转角、弯矩和剪力。

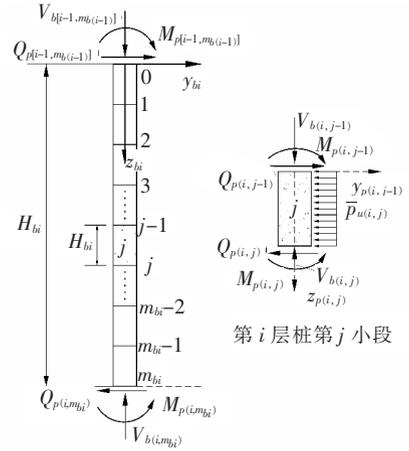


图7 地面下塑性阶段桩离散示意图

$\bar{p}_{u(i,j)}$ 为第*i*层桩中第*j*小段桩的桩侧极限土抗力平均值,采用下式计算:

$$\bar{p}_{u(i,j)} = [p_{u(i,j-1)} + p_{u(i,j)}] / 2 \quad (28)$$

式中: $p_{u(i,j-1)}$ 和 $p_{u(i,j)}$ 分别为第*i*层桩中第*j*小段桩的顶部与底部位置处极限土抗力值。

$\bar{M}_{vp(i,j)}$ 为第*i*层桩中第*j*小段桩(处于塑性阶段)的桩身平均附加弯矩作用,采用下式计算:

$$\bar{M}_{vp(i,j)} = [V_{b(i,j-1)}\theta_{p(i,j-1)}^{(前)} + V_{b(i,j)}\theta_{p(i,j)}^{(前)}] / 2$$

$\theta_{p(i,j)}^{(前)}$ 则为前一次计算结果中的第*i*层桩中第*j*小段桩底部位置处的转角值。联合式(24)~(26)可知桩身平均附加弯矩作用 $\bar{M}_{vp(i,j)}$ 值为一个已知的常数。

根据文献[13,15]对公式(27)进行 Laplace 正逆变换后可得:

$$S_{p(i,j)} = U_{p(i,j)} S_{p(i,j-1)} \quad (29)$$

式中: $U_{p(i,j)}$ 为地面下第*i*层桩中第*j*小段桩(处于塑性阶段)的桩身传递矩阵系数,如下式所示:

$$U_{p(i,j)} = \begin{bmatrix} 1 & h_{bi} & \frac{h_{bi}^2}{2EI_{bi}} & \frac{h_{bi}^3}{6EI_{bi}} & \frac{-\bar{p}_{u(i,j)}h_{bi}^4 - 4\bar{M}_{vp(i,j)}h_{bi}^3}{24EI_{bi}} \\ 0 & 1 & \frac{h_{bi}}{EI_{bi}} & \frac{h_{bi}^2}{2EI_{bi}} & \frac{-\bar{p}_{u(i,j)}h_{bi}^3 - 3\bar{M}_{vp(i,j)}h_{bi}^2}{6EI_{bi}} \\ 0 & 0 & 1 & h_{bi} & \frac{-\bar{p}_{u(i,j)}h_{bi}^2 - 2\bar{M}_{vp(i,j)}h_{bi}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\bar{p}_{u(i,j)}h_{bi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$S_{p(i,j)}$ 和 $S_{p(i,j-1)}$ 为扩充为5阶向量后如下所示:

$$S_{p(i,j)} = [y_{p(i,j)} \quad \theta_{p(i,j)} \quad M_{p(i,j)} \quad Q_{p(i,j)} \quad 1]^T \quad (31a)$$

$$S_{p(i,j-1)} = [y_{p(i,j-1)} \quad \theta_{p(i,j-1)} \quad M_{p(i,j-1)} \quad Q_{p(i,j-1)} \quad 1]^T \quad (31b)$$

通过与文献[13,15]对比发现:该文式(30)不但表达方式简洁,更克服了文献[13,15]中塑性段传递矩阵系数轴力不能等于0的局限性。因此,该文式(30)所示塑性阶段传递矩阵系数更具有通用性。

## 2.5 组合荷载作用下桩身响应求解

在传递矩阵法原理的基础上,根据该文所求解的传递矩阵系数[式(11)、(21)以及(30)]可得整个桩身的传递矩阵方程:

$$S_b = U_{b(n_b, m_{bn})} U_{b(n_b, m_{bn}-1)} \cdots U_{b(i,j)} \cdots U_{b(1,1)} \times U_{a(n_a, m_{an})} U_{a(n_a, m_{an}-1)} \cdots U_{a(i,j)} \cdots U_{a(1,1)} S_0 = US_0 \quad (32)$$

式中: $S_b = [y_b \quad \theta_b \quad M_b \quad Q_b \quad 1]^T$ 和 $S_0 = [y_0 \quad \theta_0 \quad M_0 \quad Q_0 \quad 1]^T$ 分别为桩端和桩顶处的变形、转角、弯矩和剪力的状态矩阵向量。 $U_{b(i,j)}$ 为地面下第*i*层地基土中第*j*小段桩的传递矩阵系数,当该段桩土相互作用为弹性阶段时则采用式(21)计算,当该段桩土相互作用为塑性阶段时则采用式(30)计算; $U_{a(i,j)}$ 为地面上第*i*层桩中第*j*小段桩的传递矩阵系数,采用式(11)进行计算。 $U_b$ 称为地面下桩的总传递矩阵系数,其值为从桩端至地面处的每小段桩身传递矩阵系数连续乘积; $U_a$ 称为地面上桩的总传递矩阵系数,其值为从地面处至桩顶的每小段桩身传递矩阵系数连续乘积; $U (=U_b U_a)$ 称为桩身总传递矩阵系数,其值为从桩端至桩顶的每小段桩身传递矩阵系数连续乘积。

方程(32)本质上是一个含有8个未知量(桩顶和桩端的变形、转角、弯矩和剪力)的方程组。为解得方程(32),需引入桩顶、桩端的边界条件。常见的边界约束条件主要有自由、铰接和嵌固,因此可得如下桩顶和桩端初始边界条件:

$$\{M_0 = M_t \text{ 和 } Q_0 = F_t \text{ (桩顶自由)} \\ \{M_0 = 0 \text{ 和 } Q_0 = F_t \text{ (桩顶铰接)} \quad (33)$$

$$\{\theta_0 = 0 \text{ 和 } Q_0 = F_t \text{ (桩顶嵌固)} \\ \{M_b = 0 \text{ 和 } Q_b = 0 \text{ (桩端自由)} \\ \{y_b = 0 \text{ 和 } M_b = 0 \text{ (桩端铰接)} \quad (34)$$

$$\{y_b = 0 \text{ 和 } \theta_b = 0 \text{ (桩端嵌固)}$$

根据桩顶、桩端边界条件情况,将式(33)和(34)中对应的值代入方程(32)即可解得桩顶处的变形、转角、弯矩和剪力的状态矩阵向量 $S_0$ ,则地面上任意位置处

的桩身响应为:

$$S_{a(i,j)} = U_{a(i,j)} U_{a(i,j-1)} \cdots U_{a(1,1)} S_0 \quad (35)$$

地面下任意位置处的桩身变形、转角、弯矩和剪力值为:

$$S_{b(i,j)} = U_{b(i,j)} U_{b(i,j-1)} \cdots U_{b(1,1)} U_a S_0 \quad (36)$$

## 3 案例验证与轴力影响分析

### 3.1 案例验证

吴鸣与赵明华开展了组合荷载作用下模型桩承载特性试验。桩长 $L=0.8$  m,桩外径 $d=0.016$  m,壁厚 $t=0.002$  m,抗弯刚度 $EI=0.189$  kN·m<sup>2</sup>。文献[13]采用如下桩土相互作用*p-y*曲线模型进行分析:

$$p = \begin{cases} n_{hs} (z_0 + z)^m y & y < y_u \\ n_{hs} (z_0 + z)^m y_u & y \geq y_u \end{cases} \quad (37)$$

式中: $n_{hs} (=5.84 \times 10^3$  kN/m<sup>3</sup>)为土抗力系数值; $z_0$  ( $=0.3$  m)为等效深度; $m$  ( $=0.8$ )为指数系数; $y_u$  ( $=3d/80=6 \times 10^{-4}$  m)为塑性位移。桩顶、桩端均为自由边界。该文取桩身轴力为等于桩顶竖向荷载的一个常量值,则地面下桩身弯矩理论计算值与实测值对比如图8所示。

由图8可知:该文方法所得解与文献[13]所得解完全一致,证明了该文简化思路和推导过程的正确性;同时,该文解与文献[7]中的有限层单元解和实测值结果均非常接近,说明了该文解的合理性和有效性。

### 3.2 桩身轴力对水平承载力影响的参数分析

Han认为地面上自由段桩长对组合荷载作用下基桩水平承载特性有显著的影响,并引入嵌入比概念开展桩身轴力对水平承载力的影响分析。嵌入比,即嵌入地基土中的桩长( $L_b$ )与整个桩长( $L$ )的比值( $L_b/L$ )。该文以上述案例验证中的桩为模型,假定嵌入比 $L_b/L$ 分别为0.6、0.7、0.8、0.9、1.0。桩顶水平荷载为 $F_t=0.15$  kN,桩顶竖向荷载 $V_t$ 分别为 $0F_t$ 、 $0.5F_t$ 、 $1.0F_t$ 、 $1.5F_t$ 和 $2.0F_t$ 。则桩顶最大变形计算结果如图9所示。从图9可知:不同桩顶竖向荷载作用下,桩顶最大变形随嵌入比 $L_b/L$ 的变化规律相同,即桩顶变形均随着嵌入比的增加而减小。相同嵌入比情况下,桩顶变形随着桩顶竖向荷载的增加而增加;但是当嵌入比 $L_b/L$ 为0.9~1.0时,桩顶水平变形非常接近,几乎不受桩顶竖向荷载作用的影响。

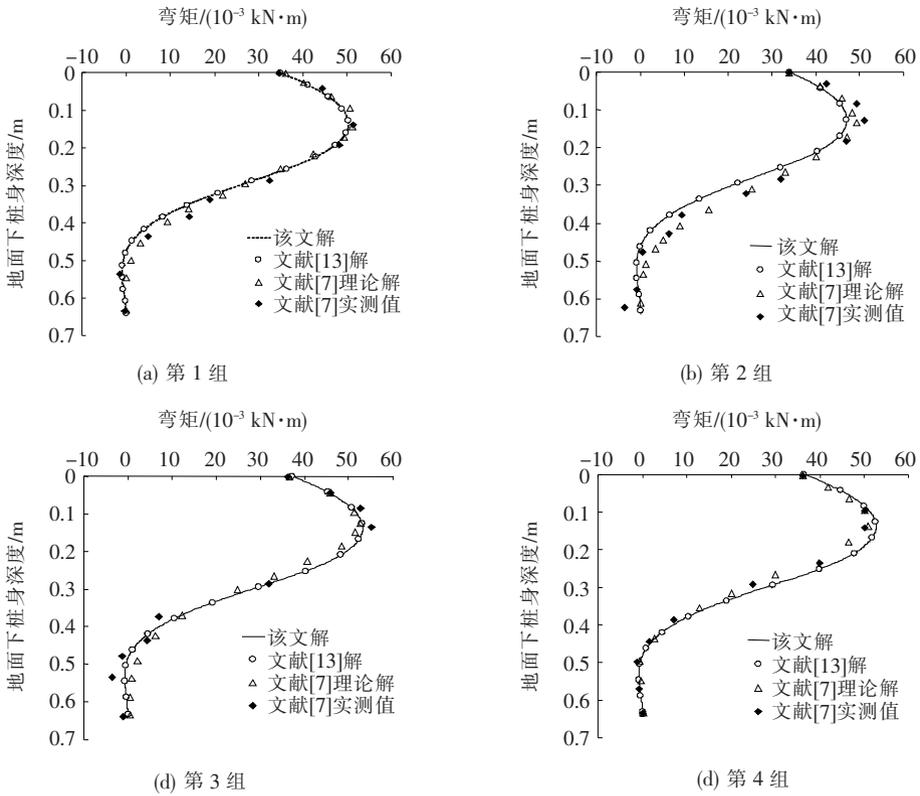


图 8 桩身弯矩计算值与实测值对比

嵌入比  $L_b/L$  对桩身附加弯矩的影响如图 10 所示。如果附加弯矩为负值,则表明该附加弯矩的作用方向与桩身截面弯矩正方向一致,对桩受力而言是不利的;如果附加弯矩为正值,则对桩受力是有利的。从图 10 可明显得出:在恒定桩顶竖向荷载作用时( $V_t = 1.0F_t$ ),桩身附加弯矩随着嵌入比  $L_b/L$  的减小而显著增加,这说明  $p-\Delta$  效应随着地面上自由段桩长增加而逐渐明显。尽管在接近桩端处附加弯矩为正值,但与负值的附加弯矩相比可以忽略。

荷载作用,则需要考虑  $p-\Delta$  效应对桩水平承载力的影响。

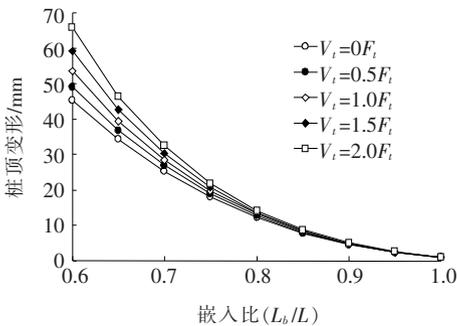


图 9 桩顶竖向荷载及嵌入比对桩顶变形的影响

图 11 为桩身轴力对附加弯矩的影响 ( $L_b/L = 0.7$ )。从图 11 可知:在恒定嵌入比时,桩身附加弯矩值随着桩顶竖向荷载的增加而显著增加。综合图 9~11 可知:当嵌入比  $L_b/L$  较小时,如果桩顶存在竖向

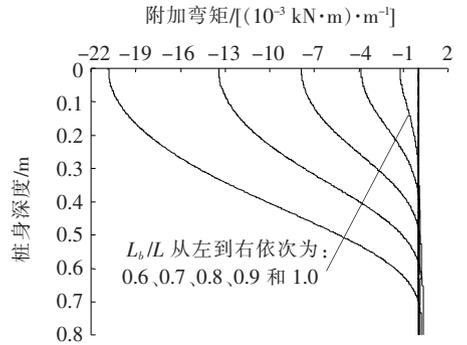


图 10 嵌入比对附加弯矩的影响 ( $V_t = 1.0F_t$ )

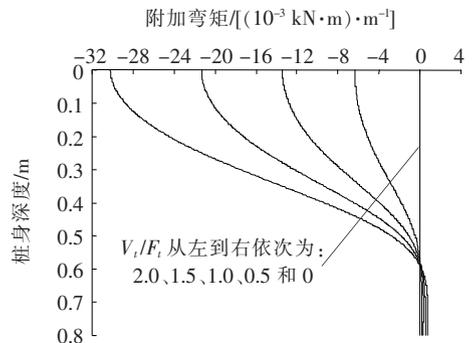


图 11 轴力对附加弯矩的影响 ( $L_b/L = 0.7$ )

## 4 结论

为研究竖向荷载对水平受荷桩承载特性的影响,引入附加弯矩概念并建立任意截面处桩身轴力作用引起的附加弯矩计算表达式。在传递矩阵法原理的基础上,通过 Laplace 正逆变换解得地面上自由段桩、地面下弹性段以及塑性段桩的传递矩阵系数解析解,并通过迭代求解得出桩身响应。通过案例对比分析验证了该文方法和解的正确性。与既有文献半解析解相比,该文解的形式更加简洁,且克服了既有文献方法中传递矩阵系数轴力不能为 0 的缺陷。最后该文开展了竖向荷载对水平受荷桩承载特性参数影响分析,得出以下结论:

(1) 桩顶变形随着嵌入比的增加而减小;相同嵌入比情况下,桩顶变形随着桩顶竖向荷载的增加而增加;但当嵌入比  $L_b/L$  为 0.9~1.0 时,桩顶水平变形几乎不受桩顶竖向荷载作用的影响。

(2) 在恒定桩顶竖向荷载作用时,桩身附加弯矩随着嵌入比  $L_b/L$  的减小而显著增加,这说明  $p-\Delta$  效应随着地面上自由段桩长增加而逐渐明显。

(3) 在恒定嵌入比时,桩身附加弯矩值随着桩顶竖向荷载的增加而显著增加。

(4) 当嵌入比  $L_b/L$  较小时,如果桩顶存在竖向荷载作用,则需要考虑  $p-\Delta$  效应对桩水平承载力的不利影响。

### 参考文献:

- [1] 赵明华,邹龙刚,刘建华. 考虑  $p-\Delta$  效应的承重阻滑桩有限差分法[J]. 工程力学,2008(3).
- [2] Liang F Y, Li Y, Li L, et al. Analytical Solution for Laterally Loaded Long Piles Based on Fourier-Laplace Integral[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(21): 5 198-5 216.
- [3] Hussien M N, Tobita T, Iai S, et al. On the Influence of Vertical Loads on the Lateral Response of Pile Foundation[J]. Computer and Geomechanics, 2014, 55: 392-403.
- [4] Anagnostopoulos C, Georgiadis M. Interaction of Axial

and Lateral Pile Responses[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993, 119(4): 793-798.

- [5] 皇甫明,王幼青,张军. 纵横向荷载作用下桩的工作性状研究[J]. 哈尔滨工业大学学报,2003(6).
- [6] 梁发云,廖晨聪,毛磊,等. 竖向-水平荷载联合作用下单桩性状模型试验研究[J]. 建筑结构,2013(6).
- [7] 吴鸣,赵明华. 大变形条件下桩土共同工作及试验研究[J]. 岩土工程学报,2001(4).
- [8] Achmus M, Abdel-Rahman K, Thieken K. Behavior of Piles in Sand Subjected to Inclined Loads[C]. Proc. 1st Int. Symp. on Computational Geomechanics (ComGeo D), IC2E, Greece, 2009: 763-774.
- [9] Poulos H G. Approximate Computer Analysis of Pile Groups Subjected to Loads and Ground Movements[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, 23(10): 1 021-1 041.
- [10] 梁发云,陈海兵,宋著. 轴向荷载对横向受荷桩承载性状影响的参数分析[J]. 土木建筑与环境工程,2011(6).
- [11] 赵明华,邹新军,邹银生,等. 倾斜荷载下基桩的改进有限元-有限层分析方法[J]. 工程力学,2004(3).
- [12] 赵明华,李微哲,单远铭,等. 成层地基中倾斜荷载桩改进有限杆单元法研究[J]. 工程力学,2008(5).
- [13] Zhu M X, Zhang Y B, Gong W M, et al. Generalized Solutions for Axially and Laterally Loaded Piles in Multi-layered Soil Deposits with Transfer Matrix Method [J]. International Journal of Geomechanics, 2017, 17(4): 1-19.
- [14] 刘庆潭,倪国荣. 结构分析中的矩阵传递法[M]. 北京: 中国铁道出版社,1997.
- [15] 竺明星,龚维明,何小元,等. 纵横向受荷基桩变形内力的矩阵传递解[J]. 岩土力学,2014(11).
- [16] Gerolymos N, Gazetas G. Static and Dynamic Response of Massive Caisson Foundations with Soil and Interface Nonlinearities-Validation and Results[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2006, 26(5): 377-394.
- [17] 竺明星. 组合荷载作用下被动桩承载机理研究[D]. 东南大学博士学位论文,2016.
- [18] Han J, Frost J D. Load-Deflection Response of Transversely Isotropic Piles under Lateral Loads[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2000, 24(5): 509-529.