

# Lade—Duncan 准则下的土拱效应原理计算方法分析

周晓龙<sup>1</sup>, 刘德稳<sup>2</sup>, 李树一<sup>3</sup>

(1. 杭州科技职业技术学院, 浙江 杭州 311402; 2. 西南林业大学 土木工程学院; 3. 浙江华东工程建设管理有限公司)

**摘要:**现行挡土墙主动土压力计算方法未考虑土拱效应的影响,因而不能全面地反映土体的三维受力特性对挡土墙土压力的影响。根据 Lade—Duncan 准则在平面应变状态下的表达式,推导了考虑土拱效应影响的挡土墙后侧向主动土压力系数公式及土体竖向平均应力分布公式,得出挡土墙后主动土应力计算理论。结果表明:基于 Lade—Duncan 准则考虑土拱效应计算的主动土压力较不考虑土拱效应计算的结果偏小,更接近试验结果和实际情况。

**关键词:**土拱效应;主动土压力;Lade—Duncan 准则

## 1 引言

挡土墙是公路、水利、建筑等行业常用的结构物,其土压力设计理论目前还是基于线性的 Rankine 或者 Coulomb 理论。近年来的室内模拟与现场模拟试验都表明挡土墙土压力呈非线性分布。为了解释上述试验现象,学者们将土拱效应原理引入挡土墙土压力求解理论中。

PAIK、SHUBHRA、涂兵雄等研究了黏性土下挡

土墙土拱效应计算理论;章瑞文,应宏伟等研究了土拱效应原理计算中不同滑裂面倾角对计算结果的影响;蒋波等则对比研究了不同土拱形状对计算结果的影响;罗汀等研究了不同位移模式对土压力计算结果的影响。上述研究成果对于发展挡土墙土拱效应具有重要的意义。

SATAKE. M 基于 SMP 准则考虑土体在三维应力状态下的主动土压力,FANG 等基于 Lade—Duncan 准则给出挡土墙的主动土压力,但上述学者在计算挡土墙土压力给出的土压力分布是线性的,尚未将

高、空间分辨率高等优势,为不良地质的快速判识提供了新的技术手段。经实践证明其对滑坡、崩塌、泥石流等不良地质揭示准确性较高,同时通过可视化的三维模型进行方案分析研究,尽可能做到方案合理、安全可行,既避免了公路建设的不良地质灾害影响,也降低了为绕避不确定的不良地质耗费巨大的建设成本。

## 参考文献:

[1] 蓝兰. 全国高速公路“十二五”回顾及“十三五”展望[J]. 交通建设与管理,2016(1).  
[2] 王帅永,唐川,何敬,等. 无人机在强震区地质灾害精细调查中的应用研究[J]. 工程地质学报,2016(4).  
[3] 王栋,蒋良文,张广泽,等. 无人机三维影像技术在铁路勘察中的应用[J]. 铁道工程学报,2016(10).

[4] 陈天博,胡卓玮,魏隼,等. 无人机遥感数据处理与滑坡信息提取[J]. 地球信息科学学报,2017(5).  
[5] 方留杨,赵鑫,吴晓南,等. 山区公路典型地质灾害倾斜摄影三维建模与分析方法研究[J]. 公路,2018(12).  
[6] 侯恩科,首召贵,徐友宁,等. 无人机遥感技术在采煤地面塌陷监测中的应用[J]. 煤田地质与勘探,2017(6).  
[7] 高姣姣. 高精度无人机遥感地质灾害调查应用研究[D]. 北京交通大学硕士学位论文,2010.  
[8] 杨嗣明. 乌鲁木齐绕城高速公路(东线)路线方案研究[D]. 长安大学硕士学位论文,2013.  
[9] 冯光胜. 基于 SPOT5 的崩塌遥感自动提取方法研究[J]. 铁道勘察,2012(2).  
[10] 邵泽兴,穆超,陈正强,等. 典型地质灾害区域遥感数据获取及应用[J]. 地理空间信息,2015(6).  
[11] 霍明. 山区高速公路勘察设计指南[M]. 北京:人民交通出版社,2003.

收稿日期:2020-07-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号:51808467);浙江省自然科学基金资助项目(编号:Y1091175);杭州科技职业技术学院校级课题(编号:HKYKYZD-2019-1)

作者简介:周晓龙,男,教授. E-mail:723375862@qq.com

土拱效应考虑进来。

该文根据 Lade-Duncan 准则在平面应变状态下的表达式,推导了考虑土拱效应影响的挡土墙后侧向主动土压力系数公式及土体竖向平均应力分布公式,得出了挡土墙后主动土应力计算理论。并与不考虑土拱效应的计算结果进行了对比。

## 2 理论分析

### 2.1 Lade-Duncan 准则在平面应变状态下的表达式

Lade-Duncan 准则是国际上著名的土体三维强度准则,其不仅可以考虑平面应变状态,而且还考虑了土体的 SD 效应,其表达式如下:

$$\frac{I_3^3}{I_3} = K_{Lade} = \frac{(3 - \sin\varphi_{TC})^3}{(1 + \sin\varphi_{TC})(1 - \sin\varphi_{TC})^2} \quad (1)$$

式中:  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  分别为应力第一、第二、第三次不变量,其表达式为:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  分别为大、中、小主应力。文献[11]结合非相关联法则给出了 Lade-Duncan 准则在平面应变状态下的表达式:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \eta_{Lade} = \frac{1}{4} \left[ \sqrt[3]{K_{Lade}} - 1 + \sqrt{(\sqrt[3]{K_{Lade}} - 1)^2 - 4} \right]^2 \quad (3)$$

对于黏性土,式(3)可通过坐标平移方式表达为:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_0}{\sigma_3 + \sigma_0} = \eta_{Lade} = \frac{1}{4} \left[ \sqrt[3]{K_{Lade}} - 1 + \sqrt{(\sqrt[3]{K_{Lade}} - 1)^2 - 4} \right]^2 \quad (4)$$

式中:  $\sigma_0 = c \cdot \cot\varphi$  ( $\varphi$ 、 $c$  为土体材料的内摩擦角与黏聚力)。

### 2.2 基于 Lade-Duncan 准则的土拱效应原理

该文在运用土拱效应原理分析时,做出以下假定:

(1) 墙土黏聚力为  $c_w = c \tan\delta / \tan\varphi$ , 此时墙土摩擦力为:  $\tau_w = (\sigma_{ahw} + \sigma_0) \tan\delta$ 。

(2) 土拱曲线假定为圆弧状,滑裂面为朗肯滑裂面。

(3) 如图 1 所示,采用坐标平移法分析,新旧坐标关系如下:

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma + \sigma_0 \\ \tau' = \tau \end{cases} \quad (5)$$

由文献[3,7]可知:A 点处主应力偏转角为:

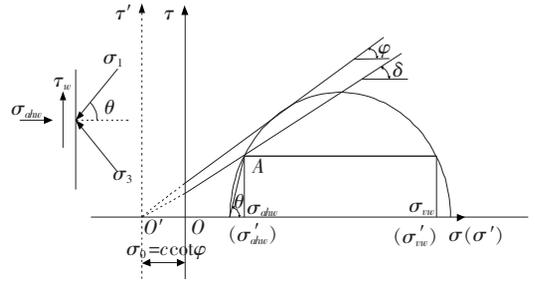


图 1 挡土墙后土体应力莫尔圆

$$\begin{cases} \alpha_A = \arcsin\left(\frac{\sin\delta}{\sin\varphi_{ps}}\right) - \delta \\ \theta = \pi/2 - \alpha_A/2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\theta = \pi/2 - \alpha_A/2$$

根据土拱效应分析原理,侧向主动土压力系数

$$K_{a\omega n} = \frac{\sigma_{ahw}}{\bar{\sigma}_V}, \text{ 需要求解 } \sigma_{ahw}、\bar{\sigma}_V \text{ 两个参数。}$$

如图 2 所示,土拱曲线假定为一条圆弧,因而对于任意一点 D 的水平力及竖向力在新坐标下可表达为:

$$\begin{cases} \sigma'_{ah} = \sigma'_1 \left( \cos^2\psi + \frac{1}{\eta_{Lade}} \sin^2\psi \right) \\ \sigma'_V = \sigma'_1 \left( \sin^2\psi + \frac{1}{\eta_{Lade}} \cos^2\psi \right) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $\psi$  为任意一点 D 的大主应力与水平线的夹角。因而,  $\bar{\sigma}_V$  在新坐标系可表达为:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_V &= \frac{\int_{AB} \sigma'_V dA}{B_z} = \frac{1}{B_z} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sigma'_1 \left( \sin^2\psi + \frac{1}{\eta_{Lade}} \cos^2\psi \right) \cdot \\ &R \sin\psi d\psi = \sigma'_1 \left[ 1 + \frac{\cos^2\theta_A}{3} \left( \frac{1}{\eta_{Lade}} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

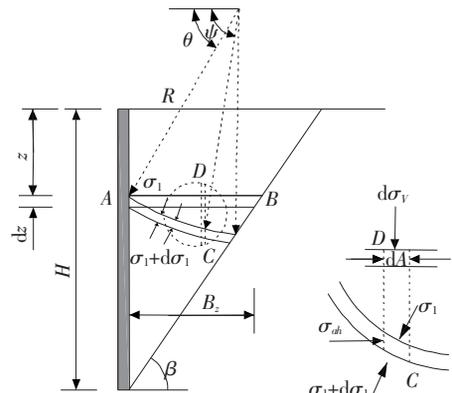


图 2 挡土墙后小主应力轨迹线

根据式(7)、(8),基于 Lade-Duncan 准则下的侧向主动土压力系数可表达为:

$$K_{a\omega n} = \frac{\sigma_{ahw}}{\bar{\sigma}_V} = \frac{\sigma'_{ahw} - \sigma_0}{\bar{\sigma}'_V - \sigma_0} =$$

$$\left( \frac{\cos^2\theta + \frac{1}{\eta_{Lade}} \sin^2\theta}{\gamma z \tan\varphi_{TC} + c_{TC}} - \frac{c_{TC}}{\gamma z \tan\varphi_{TC} + c_{TC}} \right) - \frac{c_{TC}}{\gamma z \tan\varphi_{TC} + c_{TC}} \quad (9)$$

$$\frac{\gamma z \tan\varphi_{TC}}{\gamma z \tan\varphi_{TC} + c_{TC}} - \frac{\cos^2\theta}{3} \left( 1 - \frac{1}{\eta_{Lade}} \right)$$

式中:  $\theta$  为挡土墙后大主应力与水平线夹角,  $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} [\arcsin(\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}) - \delta]$ 。

令上式  $K_{awm} = 0$ , 即可得基于 Lade-Duncan 准则下考虑土拱效应的张拉裂缝高度公式:

$$Z_c = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{c_{TC}}{\tan\varphi_{TC}} \left( \frac{\eta_{Lade}}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} - 1 \right) - q \right] \quad (10)$$

### 2.3 挡土墙后土体竖向平均应力分布公式

如图 3、4 所示为挡土墙微分单元分析模型。根据水平及竖向静力平衡, 可得:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{ahw} dz + \bar{c} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} dz - \sigma_F \frac{\sin\beta - \varphi}{\sin\beta} dz &= 0 \\ \bar{\sigma}_v (H - z) \cot\beta + dW - (\bar{\sigma}_v + d\bar{\sigma}_v) (H - z - dz) \cot\beta &= c dz + \tau_w dz + \sigma_F \frac{\cos(\beta - \varphi)}{\sin\beta} dz \end{aligned} \right. \quad (11)$$

求解黏性土的竖向平均应力时, 其侧向主动土压力系数是关于  $z$  的函数, 因而需要采用以下变换方法:

$$\left\{ \begin{aligned} K'_{awm} &= \frac{\sigma'_{awm}}{\bar{\sigma}'_v} = \frac{\left( \cos^2\theta + \frac{1}{\eta_{Lade}} \sin^2\theta \right)}{1 + \frac{\cos^2\theta}{3} \left( \frac{1}{\eta_{Lade}} - 1 \right)} \\ K_{awm} &= \frac{\sigma_{ahw}}{\bar{\sigma}_v} = \frac{\sigma'_{awm} - \sigma_0}{\bar{\sigma}_v} = \frac{K'_{awm} \bar{\sigma}'_v - \sigma_0}{\bar{\sigma}_v} = K'_{awm} + \frac{(K'_{awm} - 1)\sigma_0}{\bar{\sigma}_v} \end{aligned} \right. \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)可得:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}_v}{dz} &= \gamma - \frac{a\bar{\sigma}_v + b}{H - z} \\ a &= \frac{K'_{ahw} \tan\beta [1 + \tan\delta \tan(\beta - \varphi_{TC})]}{\tan(\beta - \varphi_{TC})} - 1 \\ b &= - \left\{ \frac{(1 - K'_{ahw})}{K'_{ahw}} + \frac{\tan\varphi [1 + \tan\beta \tan(\beta - \varphi_{TC})]}{[K'_{ahw} \tan\beta [1 + \tan\delta \tan(\beta - \varphi_{TC})]]} \right\} (a + 1) \sigma_0 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

式(13)其边界条件为  $z = Z_c, \bar{\sigma}_v = q + \gamma Z_c$ , 可解:

$$\bar{\sigma}_v = \frac{(H - z)^a}{(H - Z_c)^a} \left[ \frac{\gamma(H - Z_c)}{1 - a} + q + \gamma Z_c \right] - \frac{\gamma(H - z)}{1 - a} + \frac{b}{a} \left[ \frac{(H - z)}{(H - Z_c)} \right]^a - 1 \quad (14)$$

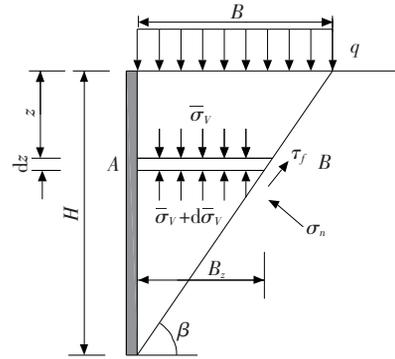


图 3 微分单元体受力图

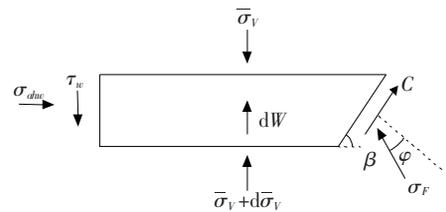


图 4 挡土墙后水平微分单元分析模型

### 2.4 挡土墙后主动土应力计算理论

由式(14), 可得基于 Lade-Duncan 准则的主动土压力计算公式为:

$$\sigma_{ahw} = K_{awm} \left\{ \frac{(H - z)^a}{(H - Z_c)^a} \left[ \frac{\gamma(H - Z_c)}{1 - a} + q + \gamma Z_c \right] - \frac{\gamma(H - z)}{1 - a} + \frac{b}{a} \left[ \frac{(H - z)}{(H - Z_c)} \right]^a - 1 \right\} \quad (15)$$

根据式(15), 得主动土压力水平合力为:

$$P_{ah} = \int_{Z_c}^{H_1} \sigma_{ahw} dz = K'_{awm} \left\{ \left( \frac{\gamma H - a\gamma Z_c}{1 - a} + q + \frac{b}{a} \right) \frac{H - Z_c}{1 + a} \left[ 1 - \frac{(H - H_1)^{a+1}}{(H - Z_c)^{a+1}} \right] + \frac{\gamma(H - Z_c)^2}{2(1 - a)} \left[ \frac{(H - H_1)^2}{(H - Z_c)^2} - 1 \right] \right\} + \left( K'_{awm} \sigma_0 - K'_{awm} \frac{b}{a} - \sigma_0 \right) (H_1 - Z_c) \quad (16)$$

挡土墙主动土压力合力即为:

$$P_a = \frac{P_{ah}}{\cos\delta} \quad (17)$$

主动土压力引起的倾覆力矩为:

$$M = \int_{Z_c}^{H_1} \sigma_{ahw} (H - z) dz = K'_{awm} \left\{ \left( \frac{\gamma H - a\gamma Z_c}{1 - a} + q + \sigma_0 \right) \cdot \frac{(H - Z_c)^{a+2} - (H - H_1)^{a+2}}{(H - Z_c)^a (a + 2)} + \frac{\gamma(H - Z_c)^3}{3(1 - a)} \cdot \left[ \frac{(H - H_1)^3}{(H - Z_c)^3} - 1 \right] \right\} + \left[ K'_{awm} \left( \frac{b}{a} - \sigma_0 \right) + \sigma_0 \right] \cdot \frac{[(H - H_1)^2 - (H - Z_c)^2]}{2} \quad (18)$$

合力作用点高度为:

$$h = \frac{M}{P_{ah}} \quad (19)$$

### 3 算例比较

采用 FANG 和 ISHIBASHI ISAO 的试验和不考虑土拱效应的理论结果来对比研究,结果见表 1 及图 5。试验条件如下: $q=0 \text{ kN/m}$ , $\gamma=15.4 \text{ kN/m}^3$ , $c=0 \text{ kPa}$ , $\delta=17^\circ$ , $\varphi_{TC}=34^\circ$ ,挡土墙高  $H=1 \text{ m}$ 。

表 1 两种计算方法结果比较

项目	土压力合力/kN	土压力合力作用点/m	倾覆力矩/(kN·m)
试验结果	1.61	0.34	0.57
不考虑土拱效应	1.95	0.38	0.71
Lade-Duncan 准则	1.62	0.36	0.59

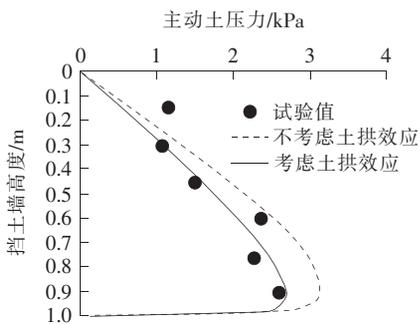


图 5 不同计算方法结果对比

由表 1 及图 5 可知:基于 Lade-Duncan 准则考虑土拱效应的计算结果较不考虑土拱效应更接近试验结果。

### 4 结论

(1) 该文根据 Lade-Duncan 准则在平面应变状态下的表达式,推导了考虑土拱效应影响的挡土墙后

侧向主动土压力系数公式及土体竖向平均应力分布公式,得出了挡土墙后主动土应力计算理论。

(2) 根据该文得到的计算结果与试验实测数据比较可知,基于 Lade-Duncan 准则考虑土拱效应计算的主动土压力较不考虑土拱效应计算的结果偏小,更接近试验结果。

### 参考文献:

- [1] 秦坤元,刘五一,肖育斐. 深基坑开挖对临近边坡稳定性影响与控制[J]. 中外公路, 2019(4).
- [2] HANDY L R. The Arch in Soil Arching[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(3): 302-318.
- [3] PAIK K H, SALGADO R. Estimation of Active Earth Pressure Against Rigid Retaining Walls Considering Arching Effects[J]. Geotechnique, 2003, 53(7): 643-653.
- [4] SHUBHRA G, PATRA N R. Effect of Arching on Active Earth Pressures for Rigid Retaining Walls Considering Translation Mode[J]. International Journal of Geomechanics, 2008, 8(2): 123-133.
- [5] 涂兵雄,贾金青. 考虑土拱效应的黏性填土挡土墙主动土压力研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2012(5).
- [6] 吴明,彭建兵,徐平,等. 考虑土拱效应的挡墙后土压力研究[J]. 工程力学, 2011(11).
- [7] 章瑞文,徐日庆. 土拱效应原理求解挡土墙土压力方法的改进[J]. 岩土力学, 2008(4).
- [8] 应宏伟,蒋波,谢康和. 考虑土拱效应的挡土墙主动土压力分布[J]. 岩土工程学报, 2007(5).
- [9] 罗汀,姚仰平,侯伟. 土的本构关系[M]. 北京:人民交通出版社, 2010.
- [10] SATAKE, M. Stress Deformation and Strength Characteristics of Soil under Three Different Principal Stresses (Discussion)[J]. Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers, 1976, 246: 137-138.
- [11] FANG Yung-shou, ISHIBASHI ISAO. Static Earth Pressure with Various Wall Movements[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 112(3): 317-333.